

HEINRICH-HERTZ-INSTITUT — BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 168

Identifizierung unbekannter Kennwerte
von dynamischen Systemen

von

Dipl. math. G. Hase



Berlin

1 9 7 3

HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG

BERLIN-CHARLOTTENBURG

Identifizierung unbekannter Kennwerte von dynamischen Systemen

Technischer Bericht Nr. 168



Identifizierung unbekannter Kennwerte von dynamischen Systemen

von

Dipl. math. G.Hase

Berlin

1973

Identifizierung unbekannter Kennwerte von dynamischen Systemen

Zusammenfassung:

Während für die Zustandsschätzung linearer dynamischer Systeme eine vollständige Theorie zur Verfügung steht, gibt es bisher zur Identifizierung nichtlinearer dynamischer Systeme zahlreiche Methoden, die häufig nur empirisch begründet werden und deren Anwendungsbereiche in der Regel eingeschränkt sind. Hier werden die wesentlichsten Verfahren erläutert und einige an einem Beispiel auf typische Eigenschaften untersucht und verglichen.

HEINRICH-HERTZ-INSTITUT

Die Bearbeiterin

Gisela Hase

(Dipl. math. G. Hase)

Der Abteilungsleiter

Friedrich Hartmann

(Prof.Dr.-Ing.I.Hartmann)

Der Institutsdirektor

E. R. Berger

(Prof.Dr.Ing.E.R.Berger)

Berlin-Charlottenburg, den 20. Dezember 1973

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	1
2. Die theoretische Lösung des Filterproblems	4
3. Näherungsverfahren für die Berechnung der bedingten Dichte	8
3.1 Entwicklung der bedingten Dichte in Orthogonalpolynome	8
3.2 Darstellung der bedingten Dichte als Summe von Dichten verschiedener Normalverteilungen	9
3.3 Das Verfahren von Bucy	12
3.4 Ein Vergleich der bisher beschriebenen Verfahren	13
4. Praktisch anwendbare Verfahren zur Lösung des nichtlinearen Filterproblems	14
4.1 Das modifizierte Kalman Filter ("Extended Kalman Filter", Abk. EKF)	14
4.2 Das EKF mit Iteration (IKF)	17
4.3 Das EKF mit doppelter Iteration (DKF)	18
4.4 Das Gaußsche Filter 2. Ordnung (GSO)	20
5. Anwendung der Verfahren aus Abschnitt 4 auf ein nichtlineares Beispiel	21
5.1 Das System	21
5.2 Die Darstellung des stochastischen Differentialgleichungssystems auf einem Digitalrechner	22
5.3 Bemerkungen zur Realisierung von Filtern	23
5.4 Filterergebnisse für das Pendel	25
6. Zusammenfassung	
6.1 Programm zur Fortsetzung des Forschungsvorhabens	30

Literaturverzeichnis

1. Einleitung

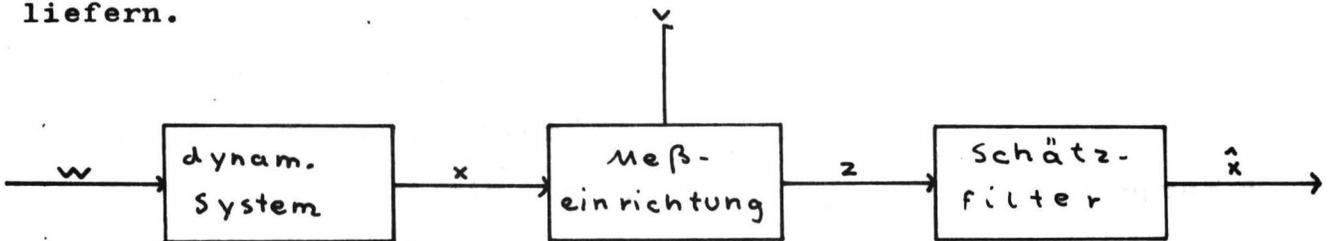
Ziel dieses Forschungsvorhabens ist es, verschiedene nichtlineare Filtermethoden auf ihre Eignung zur Systemidentifizierung zu untersuchen und zu vergleichen. Unter Systemidentifizierung wird hier die gleichzeitige Schätzung von Systemparametern und Zustandsgrößen eines dynamischen Systems verstanden. Zunächst soll erläutert werden, wie sich die Systemidentifizierung auf eine einfache Zustandsschätzung und damit auf ein Filterproblem reduzieren läßt.

Das Filterproblem

Hierbei wird von der folgenden Aufgabenstellung ausgegangen.

Gegeben ist ein dynamisches System, auf das stochastische Prozesse mit bekannten Korrelationsfunktionen einwirken. Die stochastischen Prozesse können Nutzprozesse, Störprozesse oder eine Überlagerung von beiden sein. Mit einer Meßeinrichtung soll der Zustand des Systems bestimmt werden. Das Meßergebnis wird dabei durch einen weiteren Störprozeß überlagert.

Aufgabe eines Filterverfahrens ist es, aus der gestörten Messung eine möglichst gute Schätzung für den Zustand des Systems zu liefern.



Es wird angenommen, daß das System und die Meßeinrichtung durch die folgenden mathematischen Gleichungen beschrieben werden.

Für den Zustand des Systems gilt

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)) \cdot w(t) \quad (1)$$

(stetiges System)

oder

$$x_{k+1} = \Phi(t_k, x_k) + \Gamma(t_k, x_k) \cdot w_k \quad (1a)$$

(zeitdiskretes System)

mit dem Anfangswert $x(t_0) = x_0$

Dabei sind

- $x(t), x_k$ n dimensionale Vektoren
- $\{w(t), t \in \mathbb{R}\}$ ein n -dimensionaler weißer Rauschprozeß mit der Varianz $Q(t)$
- w_k Zustand eines n -dimensionalen unabhängigen stochastischen Prozesses mit der Verteilung $N(0, Q_k)$.
- x_0 eine $N(\hat{x}_0, P_0)$ verteilte n -dimensionale Zufallsgröße unabhängig von $\{w_k, k=1,2,\dots\}$

f, g, Φ und Γ sind nichtlineare Funktionen. f und g erfüllen die Voraussetzungen, die die Existenz und Eindeutigkeit der stochastischen DGL (1) auf einem abgeschlossenen Intervall sichern.

Für die Messung gilt

$$z(t) = h(t, x(t)) + v(t) \tag{2}$$

(zeitkontinuierliche Messung)

oder

$$z_k = m(t_k, x_k) + v_k \tag{2a}$$

(zeitdiskrete Messung)

Dabei gilt zusätzlich

$z(t)$ ist ein m -Vektor

$\{v(t), t \in \mathbb{R}\}$ ist ein m -dimensionaler weißer Rauschprozeß mit der Varianz $R(t)$.

v_k ist Zustand eines m -dimensionalen unabhängigen stochastischen Prozesses mit der Verteilung $N(0, R_k)$.

h und m sind nichtlineare Abbildungen.

Von der Anwendung hängt es ab, welche der Gleichungen (1) und (2) man betrachtet. Je nach Kombination spricht man vom stetigen, stetig-diskreten oder vom diskreten Filterproblem.

Bem. 1: In Gleichung (1) wird eine übliche aber ungenaue Schreibweise für eine Ito DGL verwendet, die mathematisch einwandfrei zu schreiben wäre als

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))d\beta(t)$$

mit $\{\beta(t), t \in \mathbb{R}\}$ als Wiener Prozeß

Bem. 2: Zunächst erscheint es als starke Einschränkung, daß $w(t)$ in Gl. (1) als weißes Rauschen angenommen wird. Weißes Rauschen ist physikalisch nicht realisierbar, und es fragt sich, wie man ein dynamisches System mit Hilfe von Gl. (1) beschreiben kann. Hier sollen nur zwei einfache Spezialfälle erwähnt werden:

- a) In manchen Fällen erreicht man eine geeignete Darstellung des Systems durch "Zustandserweiterung". Dies trifft z.B. zu für ein stationäres normalverteiltes Systemrauschen $\tilde{w}(t)$ mit der Korrelationsfunktion

$$R(\tau) = \sigma^2 \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right) \cdot e^{-\sigma |\tau|}$$

$\tilde{w}(t)$ erfüllt die stochastische DGL

$$\dot{\tilde{w}}(t) = -\sigma \tilde{w}(t) + \sigma \cdot \tilde{\beta}(t)$$

wobei $\tilde{\beta}(t)$ weißes Rauschen bezeichnet.

Wird dann das dynamische System beschrieben durch

$$\dot{y}(t) = \check{f}(t, y(t)) + \check{g}(t, y(t)) \cdot \tilde{w}(t) \quad (1b)$$

so erhält man für den erweiterten Zustandsvektor

$$\begin{pmatrix} y \\ \tilde{w} \end{pmatrix} \text{ eine DGL in der Form von Gl. (1).}$$

- b) Bei linearen Systemen kann man auf die Zustandserweiterung verzichten und Gl. (1b) als Approximation für Gl. (1) auffassen, wenn die Korrelationsdauer des physikalischen Rauschens hinreichend klein ist.

Das Identifizierungsproblem

Hier soll nur das diskrete Identifizierungsproblem beschrieben werden; für das stetige Problem gelten analoge Gleichungen.

Beim Identifizierungsproblem sollen außer dem Zustand noch ein oder mehrere Parameter geschätzt werden, d.h. anstelle von Gl. (1a) und Gl. (2a) behandelt man die folgenden Gleichungen:

$$x_{k+1} = \Phi(t_k, x_k, p_k) + \Gamma(t_k, x_k, q_k) \cdot w_k \quad (1c)$$

$$z_k = m(t_k, x_k, r_k) + v_k \quad (2c)$$

Dabei sind p_k , q_k und r_k unbekannte vektorielle Parameter.

Gesucht ist eine "möglichst gute" Schätzung für x_k , p_k , q_k und r_k .

Falls die Parameter zeitkonstant angenommen werden, gilt zusätzlich zu Gl. (1c) und Gl. (2c)

$$p_{k+1} = p_k \quad q_{k+1} = q_k \quad r_{k+1} = r_k \quad (1d)$$

Diese Gleichungen stellen zusammen mit (1c) ein System stochastischer Differenzgleichungen für den erweiterten Zustandsvektor $(x_k, p_k, q_k, r_k)^T$ dar, der die unbekannt Parameter mit enthält.

Sind die Parameter zeitabhängig oder werden sie als stochastische Prozesse aufgefaßt, so muß man (1d) i.a. durch eine entsprechende stochastische Differenzgleichung ersetzen.

Auf die erweiterten Zustandsgleichungen wendet man dann ein Filterverfahren an.

Damit ist das Identifizierungsproblem dem Filterproblem untergeordnet worden.

2. Die theoretische Lösung des Filterproblems

Zunächst muß definiert werden, was unter einer "möglichst guten" Schätzung zu verstehen ist. Je nach Gütekriterium ergeben sich unterschiedliche Filterverfahren.

Sei \hat{x}_k eine Schätzung für x_k , dann ist $\tilde{x}_k = \hat{x}_k - x_k$ der Fehler dieser Schätzung. Die Güte der Schätzung sei beschrieben durch eine "Verlustfunktion" $c(\tilde{x})$ mit den folgenden Eigenschaften:

1) $c(0) = 0$

2) aus $|\tilde{x}_k^1| \geq |\tilde{x}_k^2|$ folgt $c(\tilde{x}_k^1) \geq c(\tilde{x}_k^2)$

Der Erwartungswert der Verlustfunktion heißt Risiko.

Eine optimale Schätzung liegt vor, wenn das Risiko minimal wird.

Wählt man z.B. $c(\tilde{x}_k) = \tilde{x}_k^T \cdot \tilde{x}_k$, so erhält man eine optimale Schätzung, die "Schätzung mit kleinstem mittleren Fehlerquadrat" genannt wird.

Für Schätzprobleme stehen einige Ergebnisse zur Verfügung:

Satz 1: Sei $\hat{x}_k = E(x_k | z_1, \dots, z_k)$ der bedingte Erwartungswert von x_k bei vorliegenden Messungen z_1, z_2, \dots, z_k .

Sei $p(x_k | z_1, \dots, z_k)$ symmetrisch bezüglich \hat{x}_k und unimodal. Dann ist für jede Verlustfunktion \hat{x}_k die optimale Schätzung für x_k (s. Sherman /11/).

Satz 2: Unabhängig von der Gestalt der bedingten Dichte ist der bedingte Erwartungswert von x_k die Schätzung mit kleinstem mittleren Fehlerquadrat (s. Jazwinski /8/).

Sinngemäße Aussagen gelten für stetige und stetig-diskrete Schätzungen.

Diese beiden Sätze beinhalten, daß man das Filterproblem weitgehend gelöst hat, wenn man die bedingte Dichte $p(x_k | z_1, \dots, z_k)$ kennt. Aus ihr kann man nicht nur den optimalen Schätzwert ableiten, sondern auch allgemeine Aussagen über die Genauigkeit der Schätzung. Für diese Dichte gilt die Bayes'sche Rekursionsformel

$$\begin{aligned} p_{k+1|k+1} &:= p(x_{k+1} | z_1, \dots, z_{k+1}) \\ &= c_k p(z_{k+1} | x_{k+1}) \cdot p(x_k | z_1, \dots, z_k) \quad (3) \\ c_k &= 1 / \int_{\mathbb{R}^n} p(x_k | z_1, \dots, z_{k-1}) p(x_k | z_1, \dots, z_k) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} p_{k+1|k} &:= p(x_{k+1} | z_1, \dots, z_k) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} p(x_{k+1} | x_k) \cdot p(x_k | z_1, \dots, z_k) dx_k \quad (3a) \end{aligned}$$

Dabei ist

$$p(z_k | x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |R_k|^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} (z_k - m(t_k, x_k))^T R_k^{-1} (z_k - m(t_k, x_k))} \quad (3b)$$

und

$$p(x_{k+1} | x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |Q_k|^{1/2} |\Gamma(t_k, x_k)|} \cdot e^{-\frac{1}{2} (x_{k+1} - \Phi(t_k, x_k))^T (\Gamma(t_k, x_k) \cdot Q_k \Gamma^T(t_k, x_k))^{-1} (x_{k+1} - \Phi(t_k, x_k))} \quad (3c)$$

Für die bedingte Dichte beim stetigen Filterproblem gilt der Darstellungssatz von Bucy / 3 /.

Satz 3: Unter ausreichenden Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen für $p(x, t)$ und im Fall der Existenz der auftretenden Integrale und der Dichten gilt

$$p(y | z(\tau), t_0 \leq \tau \leq t) := p_{t|t} = \frac{E(e^{H_0} | x(t) = y | z(\tau), t_0 \leq \tau \leq t)}{E(e^{H_0} | z(\tau), t_0 \leq \tau \leq t)} \quad (4)$$

mit

$$H_0 = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t h(s, x(s))^T R^{-1} h(s, x(s)) ds + \int_{t_0}^t h^T(s, x(s)) R^{-1} dz(s)$$

Aus dem Darstellungssatz für $p_{t|t}$ kann man die Kushner'sche Differentialgleichung herleiten, die als Analogon zu den Gleichungen (3) zu betrachten ist (Bucy / 3 /).

$$dp_{t|t} = \mathcal{L}(p_{t|t}) dt + (h(t, x(t)) - \hat{h}(t, x(t))) \cdot R^{-1}(t) \cdot (dz(t) - \hat{h}(t, x(t)) dt) \cdot p_{t|t} \quad (4a)$$

mit

$$\hat{h}(t, x(t)) = \int_{\mathbb{R}^n} h(t, x(t)) p(x(t) | z(z), t_0 \leq z \leq t) dx$$

und

$$\chi(\cdot) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial (\cdot f_i)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 (\cdot (g \cdot Q g^T))}{\partial x_i \partial x_j}$$

wobei i, j die Komponenten der entsprechenden Vektoren oder Matrizen angeben.

Bisher gibt es keinen theoretischen Lösungsansatz für diese partielle DGL. Besondere Schwierigkeiten bei einer Lösung ergeben sich daraus, daß auf der rechten Seite bedingte Erwartungswerte auftreten, die in der Regel nur berechnet werden können, wenn sämtliche Momente der gesuchten Verteilung bekannt sind. Nach Bucy / 4 / ist auch eine Lösung der DGL mit Hilfe von Differenzen-Verfahren nicht erfolversprechend, weil diese Verfahren instabil werden.

Eine Ausnahme bildet das lineare Filterproblem. Für das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t) x(t) + G(t) w(t) \\ z(t) &= M(t) x(t) + v(t) \end{aligned} \quad (5)$$

mit $F(t)$ und $G(t)$ als $n \times n$ Matrizen und $M(t)$ als $m \times n$ Matrix ist die bedingte Dichte normalverteilt und wird daher durch die ersten beiden Momente charakterisiert. Aus (4a) läßt sich dann ein System gewöhnlicher stochastischer Differentialgleichungen mit eindeutiger Lösung herleiten:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= F(t) \hat{x}(t) + P(t) M(t) R^{-1}(t) [z(t) - M(t) \hat{x}(t)] \\ \dot{P}(t) &= F(t) P(t) + P(t) F(t) + G(t) Q(t) G^T(t) - \\ &\quad - P(t) Q(t) G^T(t) - P(t) M(t) R^{-1}(t) M(t) P(t) \end{aligned} \quad (6)$$

mit $\hat{x}(t) = E(x(t) | z(z), t_0 \leq z \leq t)$ und

$$P(t) = E((x(t) - \hat{x}(t))(x(t) - \hat{x}(t))^T | z(z), t_0 \leq z \leq t),$$

siehe Bucy / 3 /.

$\hat{x}(t)$ ist die Schätzung mit kleinstem mittleren Fehlerquadrat und $P(t)$ ist die Kovarianzmatrix für den Fehler (zentrale Kovarianz von $x(t)$).

Im Gegensatz zur Gleichung (4a) sind die Gleichungen (6) numerisch einfach zu lösen. Sie sind als "Kalman-Bucy" Gleichungen bekannt und werden häufig zur Zustandsschätzung verwendet.

Entsprechende Gleichungen gelten auch für das stetig diskrete und das diskrete Filterproblem.

3. Näherungsverfahren für die Berechnung der bedingten Dichte

Da analytische Lösungen für (3) und (4) im nichtlinearen Fall nicht existieren, ist man auf Näherungsverfahren angewiesen. Im folgenden werden drei solcher Verfahren beschrieben.

3.1 Entwicklung der bedingten Dichte in Orthogonalpolynome

Dieser Lösungsansatz wurde beschrieben von Sorenson und Stubberuds /14/, Fisher und Stear / 7/ und Bucy / 5/.

Mathematischer Hintergrund:

Eine Funktion $f(x)$ wird auf einem Intervall I in eine Reihe von Orthogonalpolynomen entwickelt, so daß der Fehler möglichst klein wird. Als Orthogonalpolynome wählt man zweckmäßigerweise die Hermiteschen Polynome $H_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$.

$$f(x) \sim f'(x) = \sum_{i=0}^n a_i H_i(x) \quad (7)$$

mit

$$\int_I w(x) (f(x) - f'(x))^2 dx = \min$$

Dabei ist $w(x)$ eine positive Gewichtsfunktion auf I .

Dieser Ansatz ist sinnvoll, wenn gilt

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i H_i(x) \quad (7a)$$

Ist $f(x)$ eine Dichte, so wird $f(x)$ häufig in eine Edgewoodreihe entwickelt. Dieser Ansatz unterscheidet sich nur geringfügig von Gleichung (7).

Mit einer Darstellung (7) der Dichte berechnet man dann aus Gleichung (3) Rekursionsformeln für die Momente der Dichte und die Koeffizienten a_i der Reihenentwicklung.

Fisher und Stear lösen diese Aufgabe im stetigen Fall und geben gewöhnliche DGLn für die Koeffizienten an, Bucy entwickelt diskrete Rekursionsformeln. Diese Gleichungen sind jedoch praktisch nur numerisch und mit Hilfe von Linearisierung zu lösen. Sorenson-Stubberuds vereinfachen daher das Problem, indem sie die Funktionen Φ und Γ um eine geeignete "Nominallösung" in eine Taylorreihe entwickeln und nach dem 3. Glied abbrechen. Damit erhalten sie einfache zu lösende Formeln für die Koeffizienten. Vorteil dieses Verfahrens: Vorausgesetzt, daß die Bedingung (7a) erfüllt ist und daß der Rechenaufwand es zuläßt, kann man die bedingte Dichte gut approximieren.

Nachteile des Verfahrens:

1. Nicht jede Dichte läßt sich durch eine geeignete Reihe approximieren.
2. Man kann schwer abschätzen, wie genau eine Approximation ist.
3. Durch Rundungsfehler können negative Werte für die bedingten Dichten angenommen werden, was numerische Instabilität nach sich zieht.

3.2 Darstellung der bedingten Dichte als Summe von Dichten verschiedener Normalverteilungen

Der mathematische Hintergrund:

Satz 4: Eine stückweise stetige Dichte $p(x)$ läßt sich auf einem abgeschlossenen Teilintervall des \mathbb{R}^1 gleichmäßig durch eine Folge

$$p_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\lambda(x-u) p(u) du \quad (8)$$

approximieren, d.h. es gibt ein λ_0 mit $p_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} p(x)$.

Dabei ist $\delta_\lambda(x)$ eine positive "Deltafamilie", d.h.

a) Es gibt ein a , so daß gilt

$$\int_{-a}^{+a} \delta_\lambda(x) dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 1$$

b) Für alle $0 < x < \infty$ gilt

$$\delta_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0 \quad \text{gleichmäßig}$$

c) $\delta_\lambda(x) > 0$ für alle x und λ .

Beweis, siehe /18/

Bemerkung: Der Satz gilt auch für höhere Dimensionen.

Setzt man

$$\delta_\lambda(x) = N_\lambda(x) = N(0, \lambda) = \frac{1}{(2\pi\lambda^2)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\lambda^2}}, \quad \lambda_0 = 0,$$

und approximiert man (8) durch Riemann'sche Summen

$$P_{\lambda, \lambda}(x) = \frac{1}{K} \cdot \sum_{i=1}^k p(x_i) N_\lambda(x - x_i) (\xi_i - \xi_{i-1}) \quad (9)$$

so erhält man eine endliche Approximation für $p(x)$. Dabei ist $\{\xi_i\}$ eine Zerlegung eines bel. Intervalls (a, b) , die x_i sind so gewählt, daß gilt

$$p(x_i) (\xi_i - \xi_{i-1}) = \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} p(x) dx$$

(Mittelwertsatz)

und

$$K = \int_a^b p(x) dx$$

Bemerkung: $\rho_{\alpha, \lambda}(x)$ ist eine Dichte.

Gleichung (9) verwendet man als Darstellung der bedingten Dichte in (3). Mit Hilfe von Linearisierung kann man dann Rekursionsbeziehungen für die Parameter entwickeln und dann das Filterproblem lösen.

Dieses Verfahren wurde entwickelt von Alspach und Sorenson /1/.

Die Vorteile des Verfahrens sind:

1. Die Approximation der bedingten Dichte gilt für eine größere Klasse von Dichten als die Approximation durch Orthogonalfunktionen und kann mit beliebiger Genauigkeit erreicht werden.
2. Die Approximationen sind Dichten, daher ist das Verfahren numerisch stabil.
3. Da die Dichten aus Summen von Normalverteilungsdichten bestehen, kann man lokal linearisieren und die Koeffizienten der Approximationen aus den linearen Filtergleichungen (6) bestimmen.

Die Nachteile des Verfahrens sind:

1. Die Reihenglieder in (9) sind nicht orthogonalisierbar, so daß eine Linearisierung notwendig ist, um die entsprechenden Koeffizienten rekursiv berechnen zu können.
2. Der Rechenaufwand ist erheblich.

3.3 Das Verfahren von Bucy

a) Der mathematische Hintergrund

Dies Verfahren wurde zur gleichen Zeit wie das vorher beschriebene entwickelt und geht von den gleichen Voraussetzungen aus.

In Gleichung (8) wählt man

$$\delta_\lambda(x-u) \equiv \delta_0(x-u) \equiv \delta(x-u)$$

Dann erhält man analog zu (9) eine Approximation für $p(x)$ als Summe von diskreten Dichten.

$$p(x) \sim p_d(x) = \sum_{i=1}^d \alpha_i p(x_i), \quad (10)$$
$$\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1$$

Dabei ist $p_d(x)$ wieder eine bedingte Dichte.

b) Beschreibung des Verfahrens:

Ausgang sind die Gleichungen (1a), (2a) und (3). Die Gl. (3) löst Bucy mit dem Ansatz aus Gl. (10) für die bedingte Dichte. Auf den Koordinatenachsen im \mathbb{R}^n zeichne man je $(2M+1)$ Punkte symmetrisch zum Nullpunkt aus. Auf diese Weise erhält man ein Gitter $\{g_k, k=1,2,\dots\}$ von $(2M+1)^n$ Punkten im \mathbb{R}^n . Dann gilt die Rekursionsgleichung

$$c_k p_{k|k-1}(i_1, \dots, i_n) = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^{2M+1} T_{k-1}(g_k(i_1, \dots, i_n), g_{k-1}(j_1, \dots, j_n)) \cdot$$

$$\cdot p_{k-1|k-2}(j_1, \dots, j_n)$$

((i_1, \dots, i_n) bezeichnet einen bestimmten Gitterpunkt)

mit

$$T_k(g_{k+1}(i_1 \dots i_n), g_k(j_1 \dots j_n)) = \\ \exp(z_k^T R_k^{-1} m(t_k, g_k(j_1 \dots j_n)) - m^T(t_k, g_k(j_1 \dots j_n)) \cdot R_k^{-1} \cdot \\ \cdot m(t_k, g_k(j_1 \dots j_n))) \cdot N(g_{k+1}(i_1 \dots i_n) - \Phi(t_k, g_k(j_1 \dots j_n)), \\ \Gamma(t_{k+1}, g_{k+1}(i_1 \dots i_n)) \cdot Q_k \cdot \Gamma^T(t_{k+1}, g_{k+1}(i_1 \dots i_n))) \quad (11)$$

(11) ist hinreichend, um die bedingte Dichte zu berechnen, wenn eine geeignete Anfangsdichte gegeben ist. Um den erheblichen Rechenaufwand herabzusetzen, werden die folgenden Maßnahmen angewendet:

- a) Das Gitter wird nicht fest im \mathbb{R}^n gewählt, sondern nach jedem Schritt so festgelegt, daß sein Zentrum mit dem Erwartungswert der bedingten Dichte möglichst übereinstimmt und seine Maschenweite der Varianz der bedingten Dichte angepaßt wird. Dadurch kann man mit kleinstmöglichem \mathcal{M} einen Bereich überdecken, indem das bedingte Wahrscheinlichkeitsmaß konzentriert ist.
- B) Nach der Berechnung eines Wertes der bedingten Dichte werden "Erwartungsgebiete" für den nächsten Wert berechnet und dann nur noch Gitterpunkte berücksichtigt, die innerhalb dieser Erwartungsgebiete liegen. Auf diese Weise werden vernachlässigbare Summanden in (11) von der Summation von vornherein ausgeschlossen.

Bem.: Für die Berechnung der bedingten Dichte ist bei diesem Verfahren keine Linearisierung notwendig. Abgesehen hiervon hat das Verfahren ähnliche Vor- und Nachteile wie das Verfahren von Alspach und Sorenson.

3.4 Ein Vergleich der bisher beschriebenen Verfahren

Die Verfahren, die bisher beschrieben worden sind, haben die folgenden Eigenschaften gemeinsam:

1. Sie sind mathematisch fundiert und können theoretisch gute Approximationen der bedingten Dichten liefern.
2. Indem man die bedingten Dichten berechnet, kann man außer der Schätzung prinzipiell noch die höheren Momente der bedingten

Verteilungen berechnen und danach Entscheidungen über die Verlässlichkeit der Schätzungen treffen.

3. Erkauft werden diese Vorteile durch zum Teil sehr großen Rechenaufwand, weshalb diese Verfahren für "online" Schätzungen ausfallen. Bucy / 5 / hat umfangreiche Untersuchungen in Bezug auf Rechenaufwand und Genauigkeit an zwei nichtlinearen, Beispielen 2. Ordnung durchgeführt.

Dabei lieferte das Verfahren mit Orthogonalpolynomen gute Werte, wenn man Polynome 9. Grades berücksichtigte. Für dies Verfahren gelang es Bucy, die Rechenzeit auf 0.3 Sekunden auf einem IBM 360 Rechner pro Verarbeitung eines Meßwertes herabzusetzen. Für das Verfahren von Bucy betrug die Rechenzeit das 150-fache des Verfahrens mit Orthogonalpolynomen. Bei beiden Verfahren wurden dabei Methoden verwendet, wie sie in Abschnitt 3.3 beschrieben sind, um die Rechenzeit herabzusetzen. Anderenfalls ist die 6-5 fache Rechenzeit zu erwarten.

Der Aufwand für das Verfahren von Sorenson-Alspach dürfte ebenso hoch sein wie für das Verfahren von Bucy, obwohl darüber keine expliziten Aussagen vorliegen. Bucy erreichte bei seinen Beispielen für alle drei Verfahren etwa gleich gute Schätzungen.

4. Praktisch anwendbare Verfahren zur Lösung des nichtlinearen Filterproblems

Während bei den bisher beschriebenen Verfahren versucht wird, die optimale Lösung des Filterproblems im Rahmen eines vertretbaren Rechenaufwandes möglichst gut zu erreichen, wird bei den folgend beschriebenen Verfahren von vornherein darauf verzichtet, Gleichungen für das optimale Filter zu lösen (suboptimale Filter). Stattdessen wird auf Plausibilitätsannahmen zurückgegriffen, die die Filtergleichungen erheblich vereinfachen und so einen "online"-Betrieb der Filter ermöglichen.

4.1 Das modifizierte Kalman Filter (EKF)

Dies ist das bisher am häufigsten angewendete und an zahlreichen Beispielen auf seine Zuverlässigkeit hin untersuchte nichtlineare Filter. (Literatur: /2/, /6/, /8/, /9/, /10/, /16/)

Die mathematische Formulierung:

Beim EKF werden die Systemgleichungen (1) und die Meßgleichung (2) um eine durch Prädiktion (Extrapolation) gewonnene Zustandstrajektorie linearisiert. Bei der Hinzunahme neuer Meßwerte erfolgt dann eine Korrektur der Prädiktionswerte durch ein Kalman Filter für das linearisierte System, siehe Gl. (6).

Hier sei das Verfahren erläutert für ein stetig diskretes Filterproblem, auf das diskrete Filtergleichungen angewendet werden.

Angenommen, es liegt bereits eine Schätzung $\hat{x}_{k|k}$ mit der Kovarianzmatrix $P_{k|k}$ vor (für $k=0$ sind dies die vorgegebenen Anfangswerte). Dann linearisiert man f , g und m um die extrapolierte Zustandstrajektorie $\bar{x}(t)$.

$$\bar{x}(t) = \hat{x}_{k|k} + \int_{t_k}^t f(z, \bar{x}(z)) dz, \quad t > t_k$$

$$f(t, x(t)) \approx f(t, \bar{x}(t)) + F(t, \bar{x}(t))(x(t) - \bar{x}(t)) \quad (12)$$

$$g(t, x(t)) \approx g(t, \bar{x}(t))$$

$$m(t, x(t)) \approx m(t, \bar{x}(t)) + M(t, \bar{x}(t))(x(t) - \bar{x}(t))$$

$$F(t, \bar{x}(t))_{ij} = \left. \frac{\partial f_i(t, x(t))}{\partial x_j} \right|_{x(t) = \bar{x}(t)} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

$$M(t, \bar{x}(t))_{ij} = \left. \frac{\partial m_i(t, x(t))}{\partial x_j} \right|_{x(t) = \bar{x}(t)} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

Dann gelten für den Vektor $\delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t)$

und für $\delta z(t) = z(t) - m(t, \bar{x}(t))$

lineare Gleichungen, die man diskretisiert zu

$$\delta x_{k+1} = \Phi(t_{k+1}, t_k, \bar{x}_k) \delta x_k + w_{k+1} \quad (13)$$

$$\delta z_k = M(t_k, \bar{x}_k) \delta x_k + v_k$$

mit $\delta x_0 = 0$, $w_k = \mathcal{N}(0, Q_k)$ und $v_k = \mathcal{N}(0, R_k)$
 Dabei berechnet man $\Phi(t_{k+1}, t_k, \bar{x}_k)$ aus $F(t, \bar{x}(t))$
 und dann Q_k zu

$$Q_{k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau, \bar{x}(\tau)) G(\tau) Q(\tau) G^T(\tau) \Phi^T(t_{k+1}, \tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \quad (14)$$

Wendet man die Kalmangleichungen auf (13) an, so erhält man
 die folgenden Schätzgleichungen für x_{k+1} und P_{k+1}

$$\hat{x}_{k+1|k} = \hat{x}_{k|k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, \hat{x}(t | x(t_k) = x_{k|k})) dt \quad (15)$$

$$P_{k+1|k} = \Phi(t_{k+1}, t_k, \hat{x}_{k|k}) \cdot P_{k|k} \cdot \Phi^T(t_{k+1}, t_k, \hat{x}_{k|k}) + Q_{k+1} \quad (16)$$

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K(t_{k+1}, \hat{x}_{k+1|k}) \cdot [z_{k+1} - m(t_{k+1}, \hat{x}_{k+1|k})] \quad (17)$$

$$P_{k+1|k+1} = [1 - K(t_{k+1}, \hat{x}_{k+1|k}) \cdot M(t_{k+1}, \hat{x}_{k+1|k})] \cdot P_{k+1|k} \cdot [1 - K(t_{k+1}, \hat{x}_{k+1|k}) \cdot M(t_{k+1}, \hat{x}_{k+1|k})]^T + K(t_{k+1}, \hat{x}_{k+1|k}) \cdot R_{k+1} \cdot K^T(t_{k+1}, \hat{x}_{k+1|k}) \quad (18)$$

$$K(t_{k+1}, \hat{x}_{k+1|k}) = P_{k+1|k} \cdot M^T(t_{k+1}, \hat{x}_{k+1|k}) \cdot [R_{k+1} + M(t_{k+1}, \hat{x}_{k+1|k}) \cdot P_{k+1|k} \cdot M^T(t_{k+1}, \hat{x}_{k+1|k})]^{-1} \quad (19)$$

Die Vorteile dieses Verfahrens:

1. Es benötigt einen relativ geringen Rechenaufwand und ermöglicht so "on line" Schätzungen.
2. Es liefert erfahrungsgemäß häufig gute Schätzwerte.
3. Außer der Schätzung selbst berechnet das Filter noch Konfidenzintervalle für die Schätzung.

Nachteil des Verfahrens

In die Herleitung gehen zwei wesentliche Annahmen ein.

- a) Die Zustandstrajektorie, um die linearisiert wird, muß dicht bei der tatsächlichen liegen. Andernfalls wird der Fehler der Taylorentwicklung unvertretbar groß.
- b) Die Anfangsverteilung und die bedingten Verteilungen sind durch Normalverteilungen approximierbar. Trifft dies nicht zu, dann ist in der Regel nicht gesichert, daß die Kalman-gleichungen (6) für das linearisierte System eine optimale Lösung liefern und die Rechtfertigung zur Anwendung des Verfahrens wird fraglich.

Bei einem linearen Filter wird mit einer Schätzung auch der mittlere quadratische Fehler der Schätzung berechnet, und dieser Fehler deckt sich mit dem empirisch ermittelten.

Beim EKF treten auf Grund der Annahmen a) und b) Modellfehler auf, die in den Filtergleichungen nicht berücksichtigt werden. Ein empirisch ermittelter quadratischer Fehler ist damit in der Regel größer als der vom Filter berechnete. Wesentlich für die Zuverlässigkeit eines EKF ist jedoch, daß diese beiden Fehler etwa gleich groß sind, daß also der vom Filter berechnete Fehler Modellfehler überdeckt.

Annahme a) kann man als gesichert betrachten, wenn die Kovarianzmatrizen in den Filtergleichungen hinreichend groß bzw. klein sind (siehe Abschnitt 5.3).

Annahme b) ist nur mit Hilfe eines der in Abschnitt 3. beschriebenen Verfahren zur Berechnung der bedingten Dichte zu rechtfertigen.

4.2 Das modifizierte Kalmanfilter mit Iteration (IKF)

Dies ist eine Variation des EKF, die dazu beitragen soll, Linearisierungsfehler in der Meßgleichung herabzusetzen. Dabei geht man von der Annahme aus, daß $\hat{x}_{k|k}$ eine bessere Näherung

für x_k ist als $\hat{x}_{k|k-1}$. Nachdem man also $\hat{x}_{k|k}$ berechnet hat, linearisiert man $m(t_k, x_k)$ neu um $\hat{x}_{k|k}$ und löst dann die Gleichungen (17)-(19) noch einmal. Danach erhält man einen Schätzwert für x_k , der vermutlich noch besser ist als der alte, und man kann wieder neu linearisieren. Das Verfahren bricht ab, wenn sich aufeinanderfolgende Schätzwerte kaum noch voneinander unterscheiden oder wenn erkennbar ist, daß eine Konvergenz der Schätzungen für x_k nicht eintritt. In diesem Fall arbeitet das IKF wie ein EKF.

Das IKF unterscheidet sich vom EKF dadurch, daß Gl. (17) ersetzt wird durch

$$\eta_{i+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K(t_k, \eta_i) \cdot (z_k - m(t_{k+1}, \eta_i)) - (M(t_{k+1}, \eta_i)) \cdot (\hat{x}_{k+1|k} - \eta_i) ; i = 1, 2, \dots \quad (20)$$

$$\eta_1 = \hat{x}_{k+1|k}$$

Für $i=1$ sind Gl. (17) und Gl. (20) identisch. Konvergieren die Werte für η , so wird $\hat{x}_{k|k}$ mit dem letzten berechneten Wert η_e gleichgesetzt.

4.3 Das modifizierte Kalmanfilter mit doppelter Iteration (DKF)

Dies Verfahren erweitert das IKF, indem es die Gleichungen (15) und (16) in die Iteration miteinbezieht: Hat man einen Filterwert $\hat{x}_{k+1/k+1}$ berechnet, so schließt man zurück auf einen Wert $\hat{x}'_{k,k}$, der vermutlich eine bessere Näherung für x_k ist als $\hat{x}_{k,k}$, und wendet dann die Gleichungen (15)-(19) erneut an. Dies Verfahren wird so oft wiederholt, bis sich aufeinanderfolgende Werte für $\hat{x}_{k+1,k+1}$ nicht mehr wesentlich voneinander unterscheiden, oder wenn nicht erkennbar ist, daß nacheinander berechnete Werte für $\hat{x}_{k+1, k+1}$ einem Grenzwert zustreben.

Im Gegensatz zum IKF ist das DKF geeignet, zusätzlich zu Linearisierungsfehlern in der Meßgleichung auch Linearisierungsfehler bei der Prädiktion auszugleichen. Die vollständigen Gleichungen

für das DKF lauten

$$\eta_{i+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K(t_{k+1}, \eta_i, \xi_i) [z_k - m(t_{k+1}, \eta_i) - \quad (21)$$

$$- M(t_{k+1}, \eta_i) (\hat{x}_{k+1|k} - \eta_i)]$$

$$\xi_{i+1} = \hat{x}_{k|k} + S(t_k, \xi_i) [\eta_{i+1} - \hat{x}_{k+1|k}] \quad (22)$$

$$\eta_1 = \hat{x}_{k+1|k}$$

$$\xi_1 = \hat{x}_{k|k}$$

$$\bar{x}(t_{k+1}, \xi_i) = \xi_i + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \quad (23)$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = \bar{x}(t_{k+1}, \xi_i) + \Phi(t_{k+1}, t_k, \xi_i) (\hat{x}_{k|k} - \xi_i) \quad (24)$$

$$K(t_{k+1}, \eta_i, \xi_i) = P_{k+1|k} \cdot M^T(t_{k+1}, \eta_i) \cdot [M(t_{k+1}, \eta_i) \cdot \quad (25)$$

$$\cdot P_{k+1|k} + M^T(t_{k+1}, \eta_i) + R_{k+1}]^{-1}$$

$$P_{k+1|k} = \Phi(t_{k+1}, t_k, \xi_i) \cdot P_{k|k} \Phi^T(t_{k+1}, t_k, \xi_i) + \quad (26)$$

$$+ Q_{k+1}$$

$$S(t_k, \xi_i) = P_{k|k} \Phi^T(t_{k+1}, t_k, \xi_i) P_{k+1|k}^{-1} \quad (27)$$

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \eta_e \quad (28)$$

$$P_{k+1|k+1} = [1 - K(t_{k+1}, \eta_e, \xi_e) M(t_{k+1}, \eta_e)] \cdot \quad (29)$$

$$P_{k+1|k} \cdot [1 - K(t_{k+1}, \eta_e, \xi_e) \cdot M(t_{k+1}, \eta_e)]^T +$$

$$+ K(t_{k+1}, \eta_e, \xi_e) R_{k+1} K^T(t_{k+1}, \eta_e, \xi_e)$$

Q : letzter Index der Iteration

4.4 Das Gauß'sche Filter 2. Ordnung (GSO)

Dies Filter unterscheidet sich vom EKF dadurch, daß es beiden Reihenentwicklungen von f , g und m quadratische Glieder berücksichtigt. Wie beim EKF wird die Annahme gemacht, daß die bedingte Verteilung eine Normalverteilung ist. Für die Filtergleichungen wird die folgende Form vorausgesetzt:

$$\hat{x}_{k|k} = \alpha + \beta (z_k - m(t_k, \hat{x}_{k|k-1}))$$

$$P_{k|k} = C$$

Dann folgen aus der Gleichung (4a) die Filtergleichungen für das stetig diskrete Problem: Sei $\hat{x}_{k,k}$ und $P_{k,k}$ bekannt. Dann lauten die Prädiktionsgleichungen

$$d \hat{x}(t) = f(t, \hat{x}(t)) dt + \frac{1}{2} (P d^2 f) dt, \quad (30)$$

$t_{k+1} > t > t_k$

$$d P(t) = [F(t) P(t) + P(t) F^T(t) + E(G(t) Q(t) G^T(t) | z(z), t > z > > t_k)] dt \quad (31)$$

wobei $G(t)$ die endliche Taylorreihe für $g(t, x(t))$ darstellt, und die Filtergleichungen

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1} M^T(t_k, \hat{x}_{k|k-1}) \cdot [Y^G]^{-1} \cdot (z_k - m(t_k, \hat{x}_{k|k-1}) - \frac{1}{2} P_{k|k-1} \partial^2 m) \quad (32)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - P_{k|k-1} \cdot M^T(t_k, \hat{x}_{k|k-1}) \cdot [Y^G]^{-1} \cdot M(t_k, \hat{x}_{k|k-1}) \cdot P_{k|k-1} \quad (33)$$

mit

$$Y^G = M(t_k, \hat{x}_{k|k-1}) \cdot P_{k|k-1} M^T(t_k, \hat{x}_{k|k-1}) + R_k + \frac{1}{2} (\partial^2 m P^2 \partial^2 m)$$

$$(P \partial^2 f)_i = \sum_{j, e=1}^n P(t)_{j,e} \frac{\partial^2 f_i(t, x(t))}{\partial x_j \partial x_e} \quad | \quad x(t) = \hat{x}(t)$$

$$(P^2 \partial^2 m)_{i;je} = \sum_{q,r=1}^n \frac{\partial^2 m_e(t_k, x_k)}{\partial x_q \partial x_r} \Big|_{x_k = \hat{x}_{k|k-1}}$$

$$\cdot (P_{k|k-1})_{iq} \cdot (P_{k|k-1})_{jr} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \\ e = 1, \dots, m \end{matrix}$$

und

$$\partial^2 m = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 m(t_k, x_k)}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x = \hat{x}_{k|k-1}}$$

Das GSO liefert möglicherweise genauere Werte bei der Prädiktion und bei der Filterung als das EKF.

5. Anwendung der Verfahren aus Abschnitt 4 auf ein nicht-lineares Beispiel

In Veröffentlichungen finden sich bisher nur Untersuchungen von Filtermethoden an einfachen nichtlinearen Beispielen; so betrachtet Bucy /4/, /5/ nur lineare Systeme mit nichtlinearen Meßgleichungen und Athans et al. /2/, /16/ vernachlässigen ein Systemrauschen.

Es wurde daher hier ein Beispiel mit ausgeprägten Nichtlinearitäten gesucht. Das System sollte schwingungsfähig sein, um Trajektorien über einen längeren Zeitraum verfolgen zu können, und das Systemrauschen sollte nichtlinear in die Gleichungen eingehen. Zu untersuchen war, ob auch dann noch die Linearisierungsmethoden aus Abschnitt 4 zu rechtfertigen sind.

5.1 Das System

Das Beispiel sei ein nichtlineares Pendel.

$$\ddot{\varphi}(t) = -\sin \varphi(t) \quad (\text{freies System})$$

Die Pendelbewegung soll durch eine Kraft beeinflusst werden, deren Stärke proportional ist zur horizontalen Auslenkung des Pendels und die den Charakter von weißem Rauschen hat.

Zusätzlich sollen die Anfangswerte normalverteilte Größen sein. Setzt man $x_1 = \varphi$ und $x_2 = \dot{\varphi}$ so ist die Pendelbewegung darstellbar durch das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\sin x_1(t) + c \cdot \cos x_1(t) \cdot w(t) \end{aligned} \quad (34)$$

mit $w(t)$ weißes Rauschen,

$$x_1(0) = \mathcal{N}(0,5, 0.1)$$

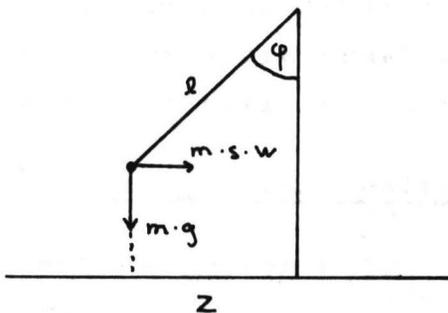
$$x_2(0) = \mathcal{N}(0, 0.1)$$

und $w(t)$ und $x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$ seien unabhängig voneinander.

Gemessen wird zu diskreten Zeitpunkten die horizontale Auslenkung des Pendels, die von einer $\mathcal{N}(0, R_k)$ verteilten Rauschfolge v_k überlagert wird.

$$z_k = \cos x(t_k) + v_k \quad (35)$$

Gesucht ist die Schätzung mit kleinstem Fehlerquadrat für x_1 und x_2 .



g : Erdbeschleunigung

m : Pendelmasse

l : Fendellänge

$$c = \frac{1}{g}$$

$$c = \frac{g}{l}$$

5.2 Die Darstellung des stochastischen Differentialgleichungssystems (34) auf einem Digitalrechner

Zur Anwendung von Filterverfahren müssen Systeme mit physikalischem Rauschen durch Gleichungen mit weißem Rauschen beschrieben werden (siehe Abschnitt 1). Umgekehrt entsteht jetzt die Frage, wie man bei der Simulation von Systemen mit weißem

Rauschen auf einem Rechner das weiße Rauschen möglichst gut durch einen physikalischen Prozeß approximiert. Im linearen Fall ist das Problem gelöst, wenn man in der Systemgleichung $w(t)$ approximiert durch den Prozeß $w^{\Delta_1}(t)$, der wie folgt beschrieben wird:

Sei $\Delta_1 > 0$ vorgegeben. Sei $\{w_k, k=1, 2, \dots\}$ eine $N(0, \frac{1}{\Delta_1})$ verteilte Folge von Rauschzahlen. Sei $w^{\Delta_1}(t)$ definiert durch

$$w^{\Delta_1}(t) = w_k \quad \text{für} \quad k \cdot \Delta_1 \leq t < (k+1) \cdot \Delta_1$$

Es gilt $\lim_{\Delta_1 \rightarrow 0} w^{\Delta_1}(t) = w(t)$.

Bei nichtlinearen Systemen ist es nicht trivial, daß man $w(t)$ durch $w^{\Delta_1}(t)$ ersetzt und

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = f(t, \tilde{x}(t)) + g(t, \tilde{x}(t)) \cdot w^{\Delta_1}(t) \quad (36)$$

als Approximation für $x(t)$ in Gl. (1) auffaßt. Es gilt jedoch der Satz von Wong-Zakai /17/, der hinreichende Bedingungen dafür gibt, wann die Ersetzung möglich ist. Diesem Satz zufolge ist eine Diskretisierung von Gl. (34) erlaubt.

5.3 Bemerkungen zur Realisierung von Filtern

Folgende Parameter haben Einfluß auf die Wirkungsweise eines Filters:

- Q : Kovarianzmatrix des Systemrauschens bzw. c in Gl. (34)
- R : Kovarianzmatrix des Meßrauschens
- P₀ : Kovarianzmatrix des Anfangswertes
- Δ_1 : Kenngröße für die Approximation des weißen Rauschens, siehe Gl. (36)
- Δ_2 : Zeitintervall zwischen zwei Messungen

und die spezielle Wahl von Trajektorien der Rauschprozesse.

- a) Die Wahl von P_0 , Q und R bestimmt bei Filtern die Größe des Fehlers, den das Filter ermittelt, aber auch die Größe von Modellfehlern (siehe Abschnitt 4.1). Für große Werte von P_0 , Q und R wird der berechnete Schätzfehler groß.

Da der Einfluß von Linearisierungsfehlern von der Größe bestimmter Ableitungen und von der Größe der berechneten Schätzvarianz abhängt (vgl. z.B. die Filtergleichungen für das EKF (15)-(19) und das GSO(30)-(33)), verursacht ein großer Wert P_0 auch große Modellfehler, wogegen größere Werte für R und Q geeignet sind, Modellfehler zu überdecken. Bei diesem Beispiel wurde der Einfluß von P_0 nicht untersucht, sondern es wurden Werte angenommen, die gute Filterergebnisse lieferten, wenn der günstigste Startwert für die Realisierung von (34), der Erwartungswert, verwendet wurde. Untersucht wurde hingegen der Einfluß von R und Q . Das Filter wird gut arbeiten, wenn Q und R hinreichend groß sind, daß Modellfehler nicht ins Gewicht fallen, aber wenn sie auch so klein sind, daß das Filter hinreichend kleine Schätzfehler berechnet.

Im Beispiel wurden die folgenden Werte verwendet:

$R = 0,0005$, $R = 0,001$, $c = -0,1$ oder $c = -0,2$, d.h., daß das Systemrauschen groß im Verhältnis zum Pendelausschlag, das Meßrauschen aber relativ klein gewählt wurde. Dabei wurde nicht versucht, die "optimalen" Werte von R und c zu finden.

Zusätzlich wurde die Abtastzeit Δ_2 verändert. Eine Vergrößerung von Δ_2 bewirkt vermutlich einen größeren Linearisierungsfehler.

Für Δ_2 wurden die Werte $\Delta_2 = 0,1$, $\Delta_2 = 0,2$, und $\Delta_2 = 0,4$ verwendet; Δ_2 ist also in jedem Fall wesentlich kleiner als die Schwingungsdauer des Systems.

- b) Für die Wahl von Δ_1 wären kleine Werte angebracht, um das weisse Rauschen gut zu approximieren. Praktisch ergibt sich eine untere Grenze für Δ_1 , da häufiges Berechnen von Zufallszahlen den Rechenaufwand erheblich vergrößern. Es erwiesen sich die Werte $\Delta_1 = 0,01$ und $\Delta_2 = 0,05$ als sinnvoll.

Außerdem wurde erreicht, daß die Folgen von Zufallszahlen reproduzierbar waren und so für alle Filterrealisierungen die die gleichen Rauschfolgen verwendet werden konnten. So war schon nach einem Lauf ein Vergleich verschiedener Verfahren möglich und der Einfluß von Parametern erkennbar.

Um statistisch gesicherte Urteile über die Güte von Filterverfahren fällen zu können, muß man über mehrere Realisierungen der Filter mitteln. Wieviele Realisierungen zu dieser Mittellung nötig sind, hängt ab von dem Konfidenzintervall, das man als zulässig betrachtet und von der Gestalt der bedingten Verteilungen, ist also schwer zu bestimmen. Mit 50 Realisierungen ist vermutlich die Mindestanforderung erfüllt, die man stellen muß, um qualitative Aussagen über das Verhalten von Filterverfahren zu machen, siehe Bucy /5/.

Zusammenfassung: Variiert wurden die Parameter c , Δ_1 , Δ_2 und R .

5.4 Filterergebnisse für das Pendel

In den folgenden Abbildungen sind Realisierungen des Lösungsprozesses von Gl. (34) über der Zeit aufgetragen (glatte Linie). Außerdem sind eingezeichnet die zugehörigen Schätzkurven ("+") und um die Schätzkurven die Konfidenzbereiche ("0"), deren Grenzen sich aus den von den Filtern ermittelten Kovarianzmatrizen ergeben.

Da es sich bei allen Filtern um suboptimale Filter handelt, stimmen die geschätzten Kovarianzen nicht mit den tatsächlichen überein (siehe Abschnitt 4.1). Dennoch sind sie als Maß für die Zuverlässigkeit von Filtern geeignet.

Der Beurteilung von Schätzverfahren wurden folgende Kriterien zugrundegelegt.

1. Ein Filter arbeitet unzuverlässig, wenn die Pendelkurve vorwiegend außerhalb der Konfidenzintervalle verläuft (Zuverlässigkeitstest).
2. Ein Filter divergiert, wenn ein Zusammenhang zwischen Pendelkurve und Schätzkurve nicht erkennbar ist ("Weglaufen" oder Verlauf in entgegengesetzter Phase).

Für die Anwendung eines Filters ist es außerdem wesentlich, daß es hinreichend kleine Schätzvarianzen berechnet.

Die Kurven sind teilweise über 50 Läufe gemittelt, größtenteils aber sind sie Ergebnisse von Einzelläufen. Es hat sich gezeigt, daß sich zusammenfassende Urteile über ein Filterverfahren bestenfalls auf Grund von gemittelten Kurven bilden lassen. Wegen des hohen Rechenaufwandes wurden jedoch bisher nur wenige gemittelte Kurven aufgenommen.

Es seien nur einige typische Filterergebnisse beschrieben:

a) Ergebnisse des EKF für den Pendelausschlag

Die Abbildungen 1 und 2 zeigen das Verhalten eines EKF bei verschiedenen Realisierungen des Systemrauschens. In beiden Abbildungen fällt die Umgebung von $t=2$ auf: Dort berechnet das Filter sehr große Konfidenzintervalle. Bei genauerer Untersuchung der Meßgleichung ergibt sich, daß in gewissen Zeitabschnitten die Koeffizienten der linearisierten Gleichung verschwinden und somit das Meßergebnis unabhängig ist von den Zustandsgrößen. In diesen "kritischen" Intervallen wird das linearisierte System also nicht beobachtbar. Außer bei $t=2$ tritt diese Erscheinung abgeschwächt auf um $t=5$, $t=8$, usw. Im folgenden wird dann von "Nichtbeobachtbarkeitsstellen" gesprochen. An diesen Stellen wird der Einfluß vernachlässigter nichtlinearer Terme wesentlich. In Abb. 1 ist das Filter offensichtlich in der Lage, diese Situation zu überbrücken; die Pendelbewegung wird gut verfolgt und lediglich an Nichtbeobachtbarkeitsstellen wird die Schätzung unsicher. Das gleiche Filter hingegen divergiert in Abb. 2.

Die Divergenz verschwindet, wenn man bei sonst gleichbleibenden Parametern ein System mit verdoppelter Rauschkovarianz beobachtet, siehe Abb. 3. Das EKF liefert dann gute Schätzungen, die lediglich an kritischen Stellen unsicher werden. Das große Systemrauschen, dessen Streuung maximal 40 % des Pendelausschlags beträgt, überdeckt offenbar den Einfluß von Nichtlinearitäten (siehe Abschnitt 5.3). Die Divergenz von Abb. 2 wird ebenfalls aufgehoben, wenn man die Abtastzeit verdoppelt, siehe Abb. 4. Erklärung: In kritischen Intervallen werden weniger irrelevante Daten ausgewertet.

Abb. 5 zeigt allerdings, daß eine Verstärkung des Systemrauschens oder eine Vergrößerung der Abtastzeit nicht immer Divergenz verhindert.

Zusammenfassung der Ergebnisse aus Einzelläufen: Wesentlich für das EKF ist es, ob und wann Nichtbeobachtbarkeitsintervalle auftreten. Es ist kaum vorherzusagen, wie es sich dort verhält; entweder divergiert es, oder es liefert gute Schätzwerte.

Um zu einem eindeutigen Ergebnis zu kommen, seien einige gemittelte Filterkurven angeführt.

Abb. 6 zeigt, daß das EKF im Mittel ein zuverlässiges Filter mit zufriedenstellender Schätzgenauigkeit ist. Nach Durchlaufen mehrerer kritischer Stellen verschlechtern sich die Schätzungen allerdings. Der Einfluß von Nichtbeobachtbarkeitsintervallen ist nur anfangs noch zu erkennen, mit der Zeit errechnet das Filter fast konstante Konfidenzgrenzen.

Bei verdoppelter Abtastzeit, Abb. 7, stellt man wieder fest, daß sich der Einfluß von kritischen Intervallen verringert und daß das Filter zuverlässiger wird. Bei verdoppelter Varianz des Systemrauschens hingegen wird das Filter im Mittel wesentlich schlechter, siehe Abb. 8 .

Nach einer Periode bewegt sich die gemittelte Kurve nur noch schwach um den Nullpunkt, ein Anzeichen, daß etwa 50 % der Schätzungen divergieren.

Offensichtlich hängt es sehr von der Wahl der Systemparameter (Abtastzeit, Rauschgrößen usw.) ab, ob ein EKF zuverlässig ist oder nicht. Dabei erschwert es das Auftreten von Nichtbeobachtbarkeitsstellen, allgemeine Grenzen für die Anwendung anzugeben.

b) Vergleich von EKF mit den übrigen Filtern für den Pendelausschlag

Abb. 9 zeigt, daß das IKF für das gleiche System wie in Abb. 2 ebenfalls divergiert und daß die Divergenz auch nach einem kritischen Intervall auftritt. Dennoch liefert das IKF im gesamten Beobachtungszeitraum durchschnittlich günstigere Schätzungen als das EKF in Abb. 2 . Auch in Abb. 10 zeigt sich das

IKF dem EKF in Abb. 5 überlegen. Zum Vergleich dazu erweist sich ein DKF in Abb. 11 als nicht so günstig: Nach der 2. kritischen Stelle verfolgt das Filter die Pendelbewegung nur noch schwach. Abb. 12 und 13 zeigen, daß ein GSO in beiden Fällen besser arbeitet als die übrigen Filter: Das Filter berechnet recht gute Schätzwerte und relativ kleine Konfidenzgrenzen. Allerdings beinhalten die Schätzwerte systematische Abweichungen, denn die Schätzkurve ist gegenüber der Pendelkurve nach links verschoben. Eine Verdopplung der Abtastzeit bewirkt beim GSO deutlich eine Verschlechterung der berechneten Schätzgenauigkeit.

Zusammenfassung für die Einzelläufe: Das IKF arbeitet vermutlich etwas günstiger als ein EKF während ein DKF zur Schätzung ungeeignet erscheint. Deutlich ist das GSO den übrigen Filtern überlegen.

Betrachtet man gemittelte Kurven, so bestätigt Abb. 14 nicht, daß ein IKF besser ist als ein EKF vgl. Abb. 7. Beide Filter berechnen etwa gleichgroße Konfidenzintervalle, und die Schätzkurven unterscheiden sich nur geringfügig voneinander. Hingegen zeigt Abb. 15, daß das DKF in der Tat zur Schätzung ungeeignet ist. (Es sei hier daran erinnert, daß DKF und IKF auf unterschiedliche Weise iterieren!).

Daß ein GSO auch im Mittel den anderen Filtern überlegen ist, zeigen die Abb. 16 und 16a. Die Schätzungen sind recht genau und besitzen kleine Konfidenzgrenzen. Allerdings treten wieder systematische Abweichungen auf, die sich bei verstärktem Systemrauschen vergrößern.

c) Filterergebnisse für die Winkelgeschwindigkeit

Die Abbildungen 17, 18, 19, 20, 21, 22 zeigen typische Filterergebnisse. Zusammenfassend gilt, daß Aussagen, die für den Pendelausschlag zutrafen, auch für dessen Ableitung gelten. Zusätzlich ergibt sich

1. Das Systemrauschen hat einen wesentlich größeren Einfluß auf die Winkelgeschwindigkeit des Systems als auf den Winkel selbst. Daraus ergeben sich ein unregelmäßigerer Kurvenverlauf und unsicherere Schätzwerte.

2. Schätzungen sind außerdem unsicherer, da in die Meßgleichung nur der Pendelausschlag und nicht seine Ableitung eingeht.
3. Die Überlegenheit des GSO zeigt sich noch deutlicher als beim Pendelausschlag.

6. Zusammenfassung

Die an dem Beispiel (34) und (35) gewonnenen Erfahrungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Das EKF ist ein brauchbares Filter, das jedoch nicht immer zufriedenstellt, besonders nach längerer Beobachtungszeit. Seine Zuverlässigkeit muß im Einzelfall nachgeprüft werden.
2. Das IKF ist kaum, das DKF ist nicht geeignet, die Ergebnisse des EKF zu verbessern. Dies Ergebnis unterscheidet sich von dem von Wishner, Athans /16/ und Sorenson /1/, die an nicht-linearen Beispielen 1. und 2. Ordnung feststellten, daß das DKF sowohl dem EKF als auch dem GSO überlegen ist. Wesentlicher Unterschied der dort untersuchten Beispiele zu dem hier gewählten ist, daß jene kein Systemrauschen enthalten (Sorenson; Athans, Wishner), daß keine Nichtbeobachtbarkeitsintervalle auftreten (Athans, Wishner) und daß die Systemgleichungen linear sind (Sorenson). Sorenson beobachtete hingegen auch ein Versagen des DKF, wenn er quadratische Terme in den Systemgleichungen berücksichtigte. Offenbar ist eine Verbesserung von Filterergebnissen durch Iteration nur bei einfachen nichtlinearen Beispielen möglich.
3. Das GSO arbeitet besser als die übrigen Filter EKF, IKF und DKF. Der Grund hierfür ist, daß in den "linearisierten" Gleichungen keine Nichtbeobachtbarkeitsintervalle auftreten. Die Schätzwerte sind allerdings mit einem systematischen Fehler behaftet, der sich mit der Beobachtungszeit und mit dem Systemrauschen vergrößert. Diese Erscheinung tritt auch auf in dem Beispiel von Sorenson. Sorenson beobachtet außerdem, daß ein GSO unter Umständen versagt, was an dem hier untersuchten Beispiel nicht bestätigt wurde.

Offenbar ist es kaum möglich, allgemeingültige Urteile über ein Filterverfahren zu fällen. Wesentlich an dem hier betrachteten Beispiel ist das Auftreten von Nichtbeobachtbarkeitsintervallen, das die wesentliche Ursache für das Versagen von Filtern ist. Diese Erscheinung, der in der Literatur bisher wenig Aufmerksamkeit geschenkt worden ist, wird wesentlich, wenn bei komplizierten Systemen die Existenz und der Einfluß von kritischen Stellen nicht einfach vorherbestimmt werden kann.

Literaturverzeichnis

- /1/ Alspach/Sorenson: Nonlinear Bayesian Estimation Using Gaussian Sum Approximations IEEE, Vol. AC17, 4, 1972
- /2/ Athans, Wishner, Bertolini: Suboptimal State Estimation for Continuous-Time nonlinear Systems from Discrete Noisy Measurements, IEEE on Autom. Control, 1969, Vol.AC 13.5
- /3/ Bucy/Joseph: Filtering for stochastic Processes with Application to Guidance, 1968, Interscience Publishers, New York
- /4/ Bucy/Senne: Digital Synthesis of Nonlinear Filters, Automatica, 1971 Vol.7, pp. 287-298
- /5/ Bucy/Hecht/Senne: An Engineer's Guide to building nonlinear Filters, Vol. 1/2, 1972 Final Report, Frank, I. Seiler Research Laboratory, Proj. 7904-00-37, USA F Academy Colorado 80840
- /6/ Farooq/Mahalanabis: Application of a statistical Approximation method to optimal nonlinear Filters, IFAC Symp. 1970 on Identification and Process Parameter Estimation, Prag
- /7/ Fisher/Stear: Nearoptimal non-linear filtering using quasi-moment functions, Int. I. Contr., 1970, Vol. 12,4, pp. 685-697
- /8/ Jazwinski: Stochastic Processes and filtering theory, Academic Press, 1970, New York, London
- /9/ Kushner: Approximation to optimal non-linear filters JACC, Proc., 1967
- /10/ Schwartz/Stear: A Comparison of Several Nonlinear Filters, IEEE on Autom. and Control, 1967, pp. 83-86.
- 11/ Sherman: A Theorem on Convex Sets with Appl., Ann. Math. Stat. 26, 1955, pp. 763-767
- 12/ Sorenson: Optimal and suboptimal recursive nonlinear filtering. Proc., 9th ann. Allerton Conf. on Circuit and System Theory, 1971

- /13/ Sorenson/Alspach: Recursive Bayesian Estimation Using Gaussian Sums, Automatica, 1971, Vol. 7, pp. 465 - 479
- /14/ Sorenson/Stubberuds: Nonlinear filtering by approximation of the posteriori density, Int. I. Contr. 1968, Vol. 8, 1, pp. 33-51
- /15/ Tait/Belanger: A Comparison of some Parameter Identification Schemes using first and second Order Extended Kalman filters and sensitivity functions, Preprints of the 2nd Prague IFAC Symp., 1970
- /16/ Wishner, Tabaczynski, Athans: A Comparison of three Non-linear Filters, Automatica, Vol. 5, 1969, pp. 487-496
- /17/ Wong/Zakai: On the relation between Ordinary and stochastic Differential Equations, Int. I. Engineering Sci. 3, 1965, pp. 213-219
- /18/ Koreyaar: Mathematical Methods, Vol. 1, pp. 330-333, Academic Press, New York (1968)

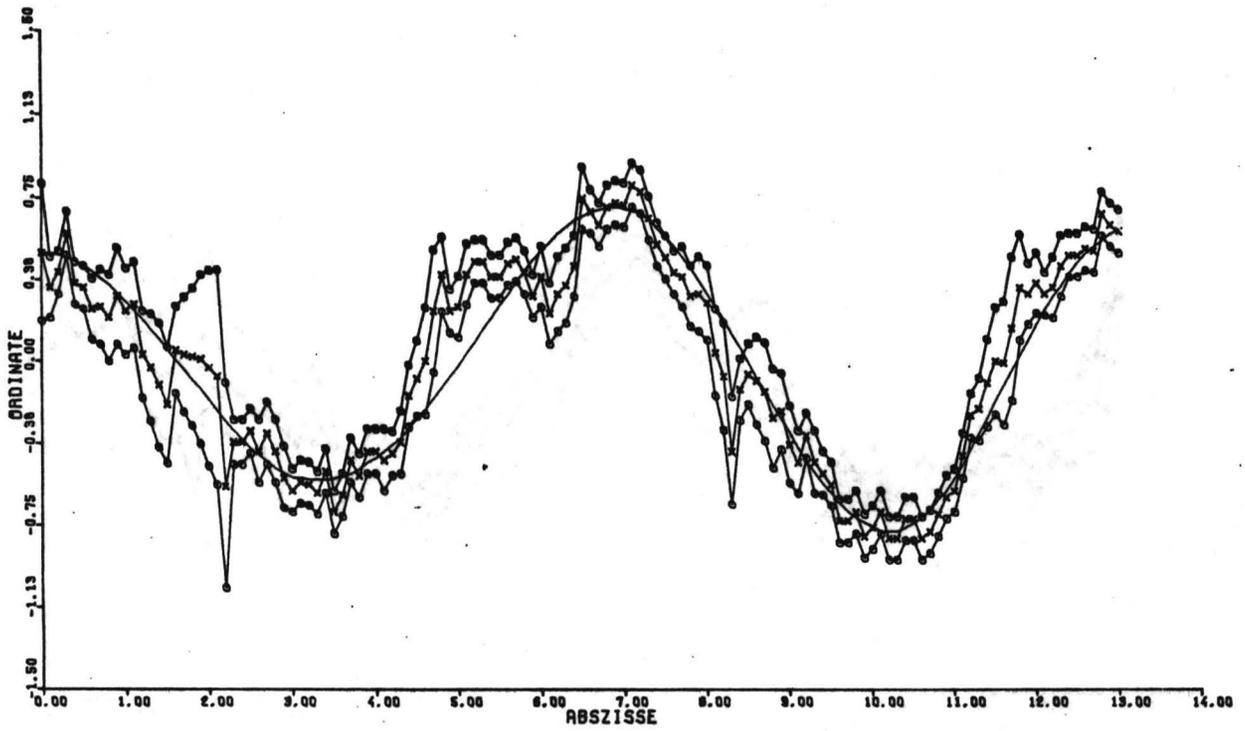


Abb. 1
 EKF für φ , Einzellauf
 $c = -0,1$, $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,1$ $R = 0,005$

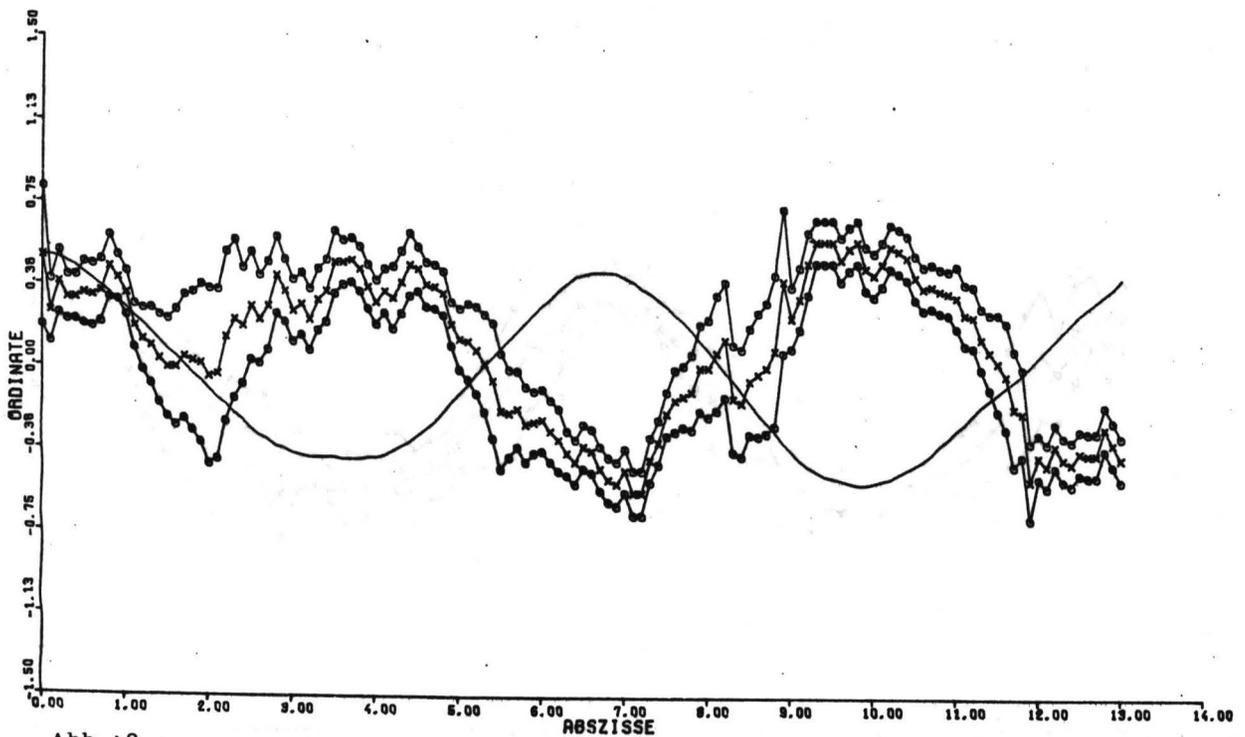


Abb. 2
 EKF für φ , Einzellauf
 $c = -0,1$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,1$ $R = 0,005$

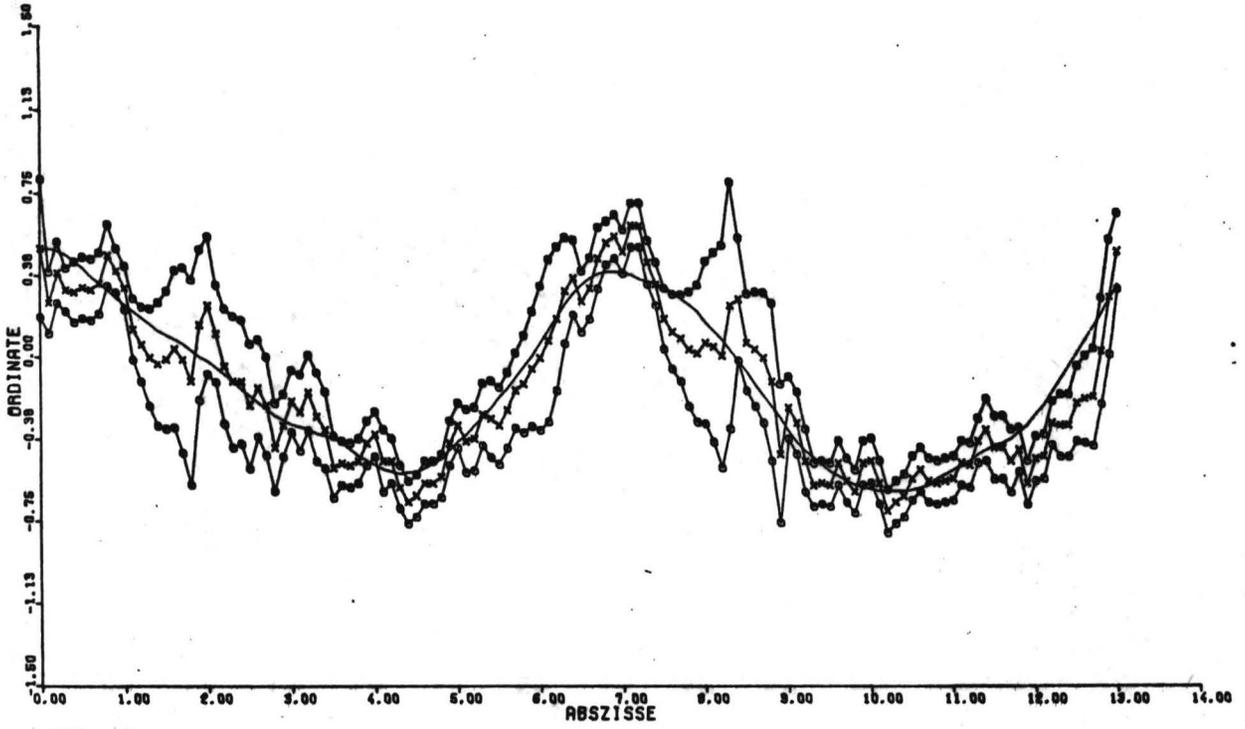


Abb. 3
 EKF für φ , Einzellauf
 $c = -0,2$, $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,1$ $R = 0,005$

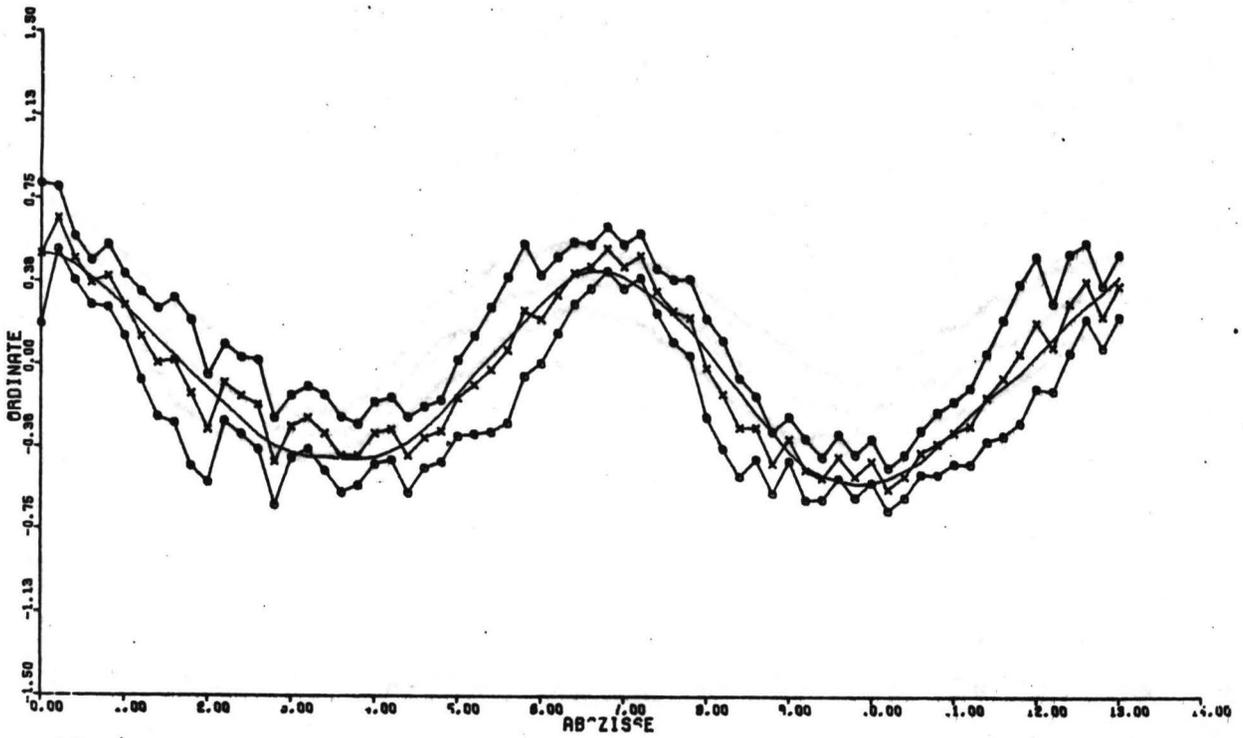


Abb. 4
 EKF für φ , Einzellauf
 $c = -0,1$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

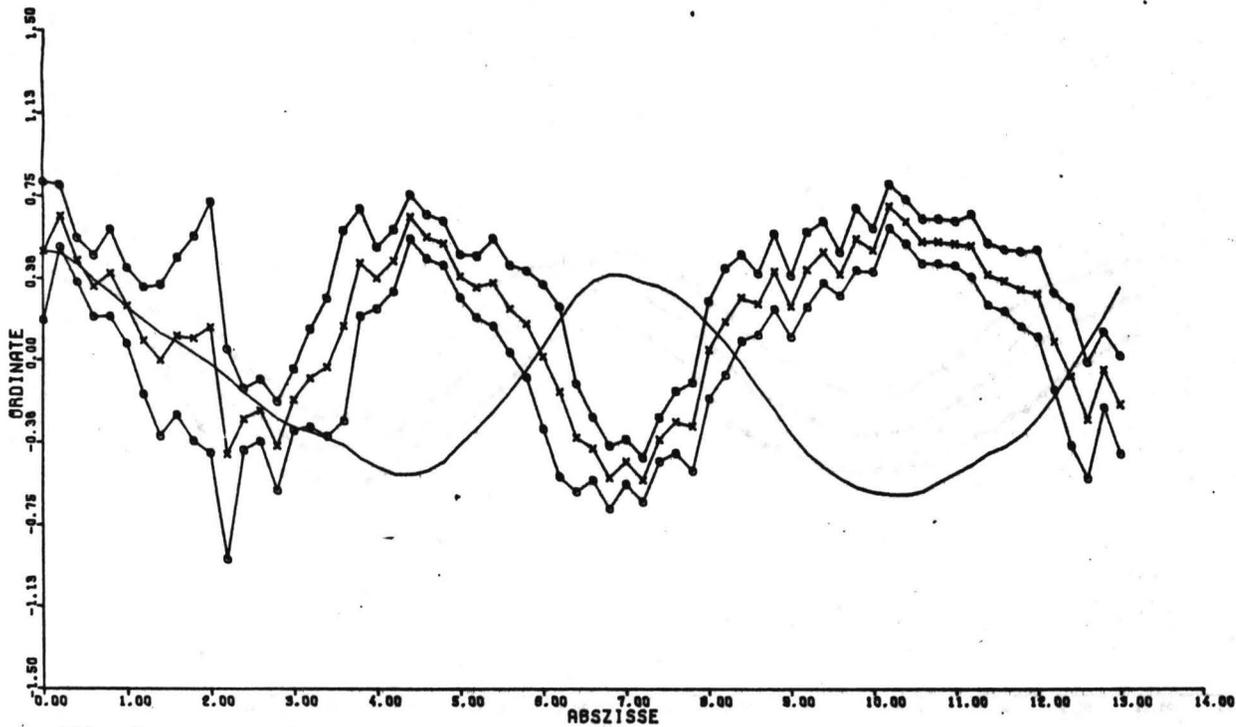


Abb. 5
 EKF für φ , Einzellauf
 $c = -0,2$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

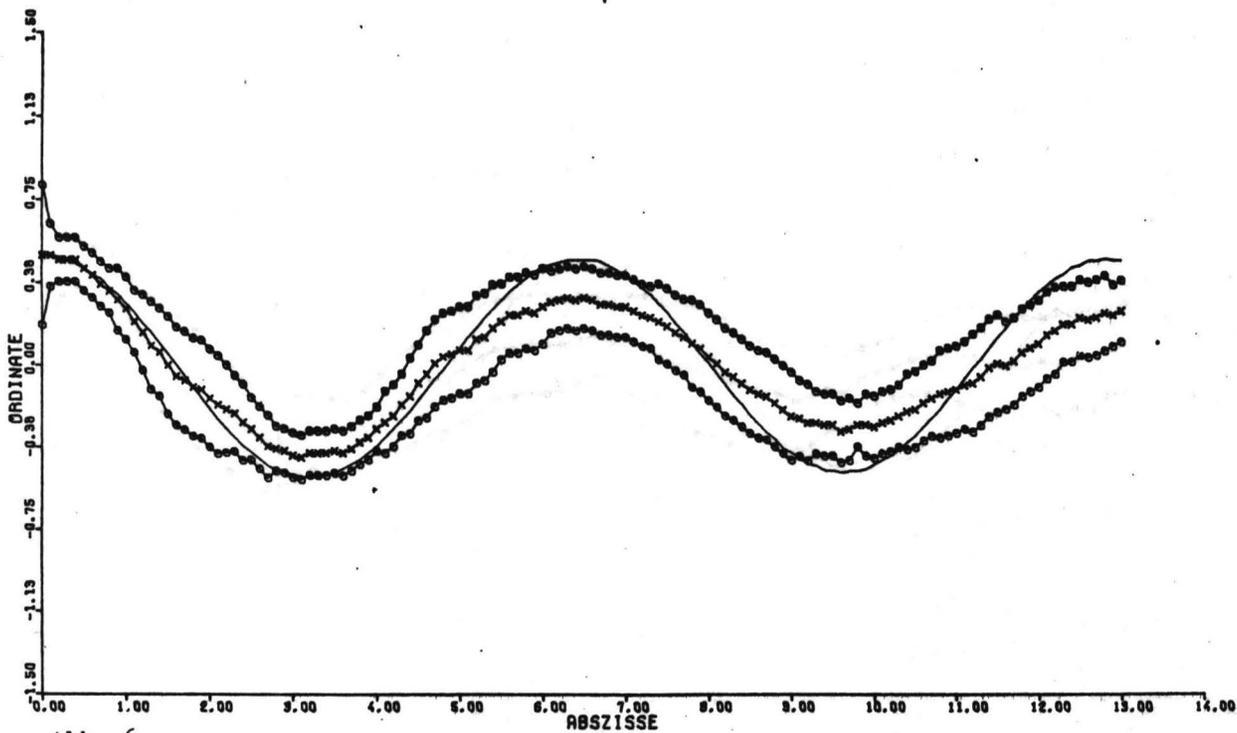


Abb. 6
 EKF für φ , Mittel über 50 Läufe
 $c = -0,1$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,1$ $R = 0,005$

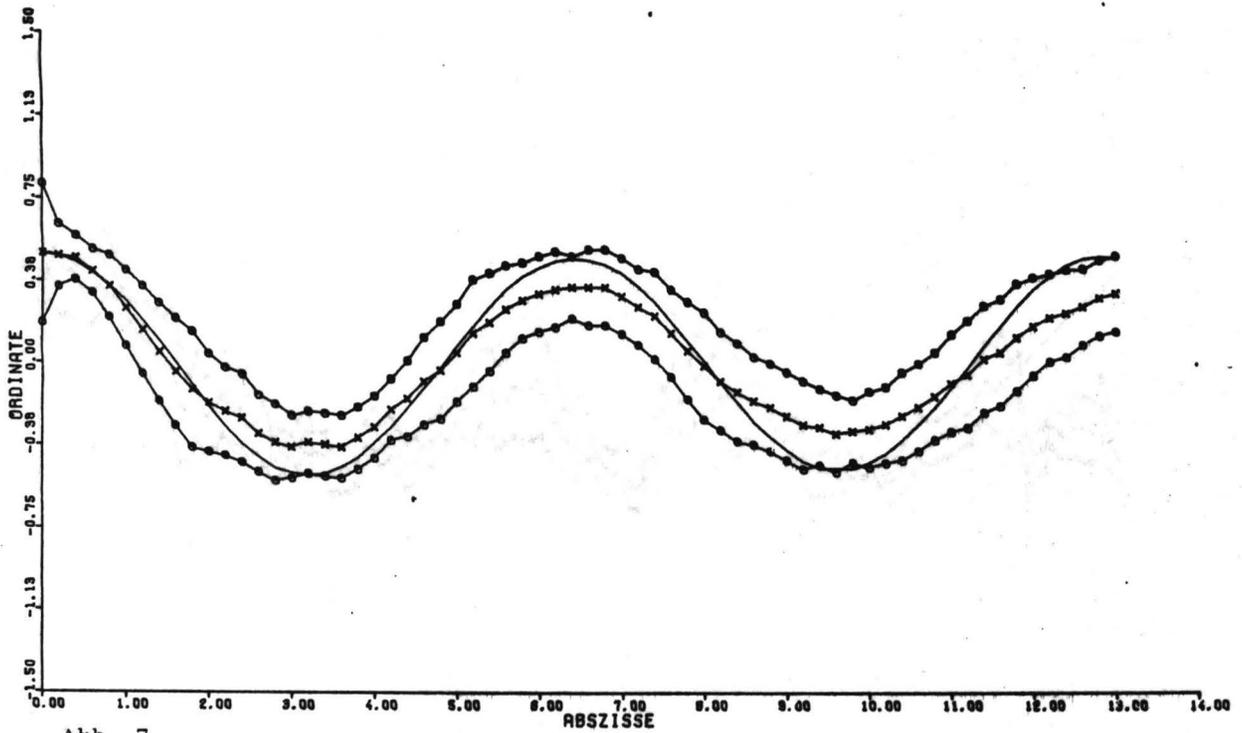


Abb. 7
 EKF für φ , Mittel über 50 Läufe
 $c = -0,1$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

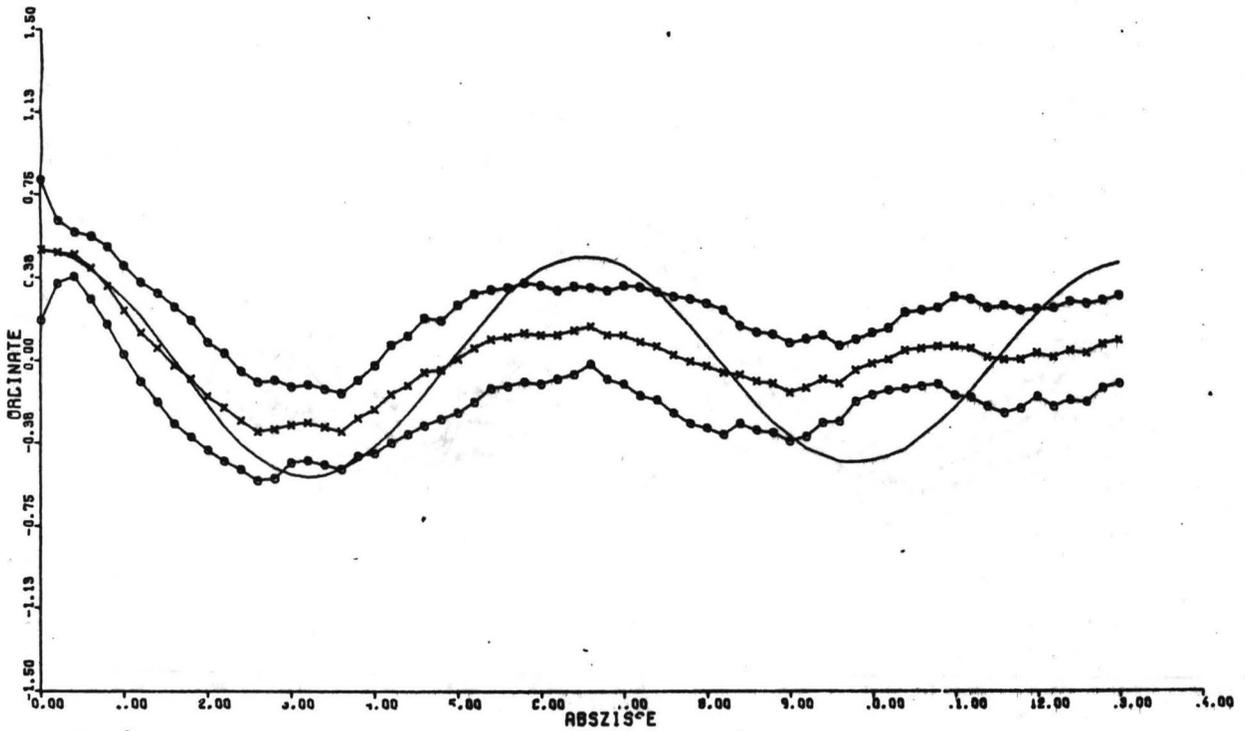


Abb. 8
 EKF für φ , Mittel über 50 Läufe
 $c = -0,2$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

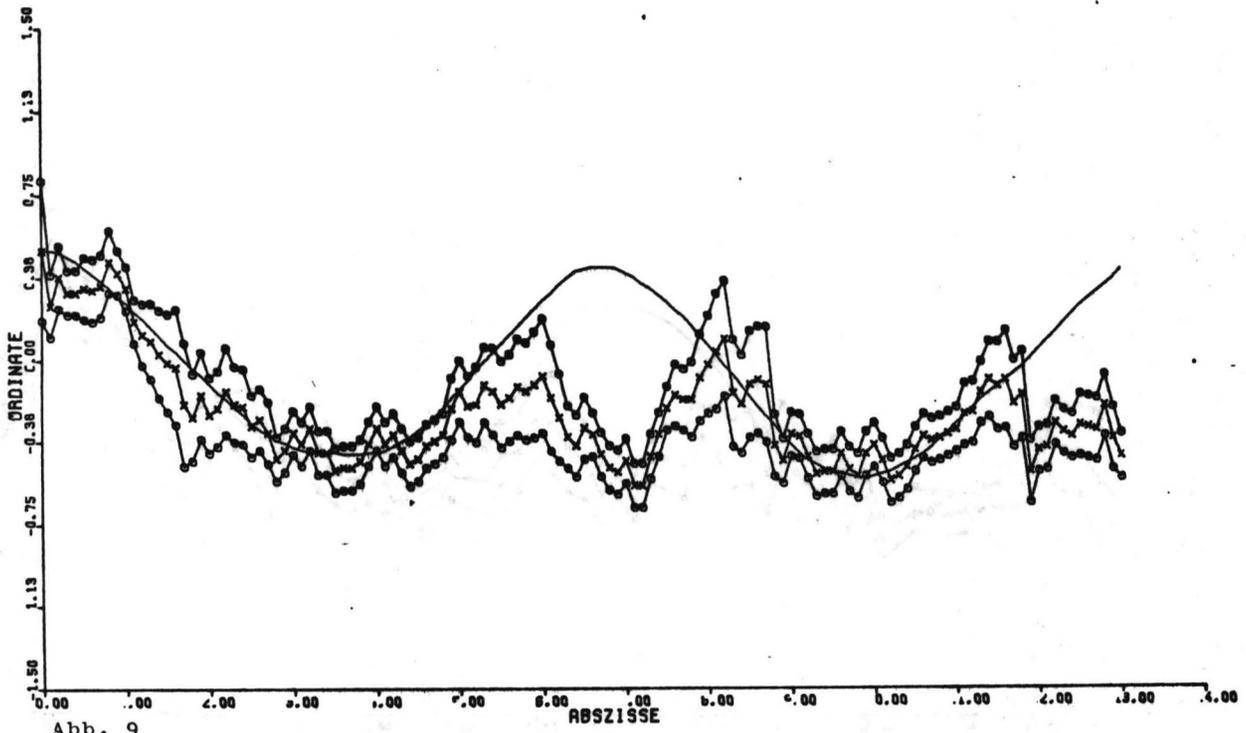


Abb. 9
 IKF für φ , Einzellauf
 $c = -0,1$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,1$ $R = 0,005$

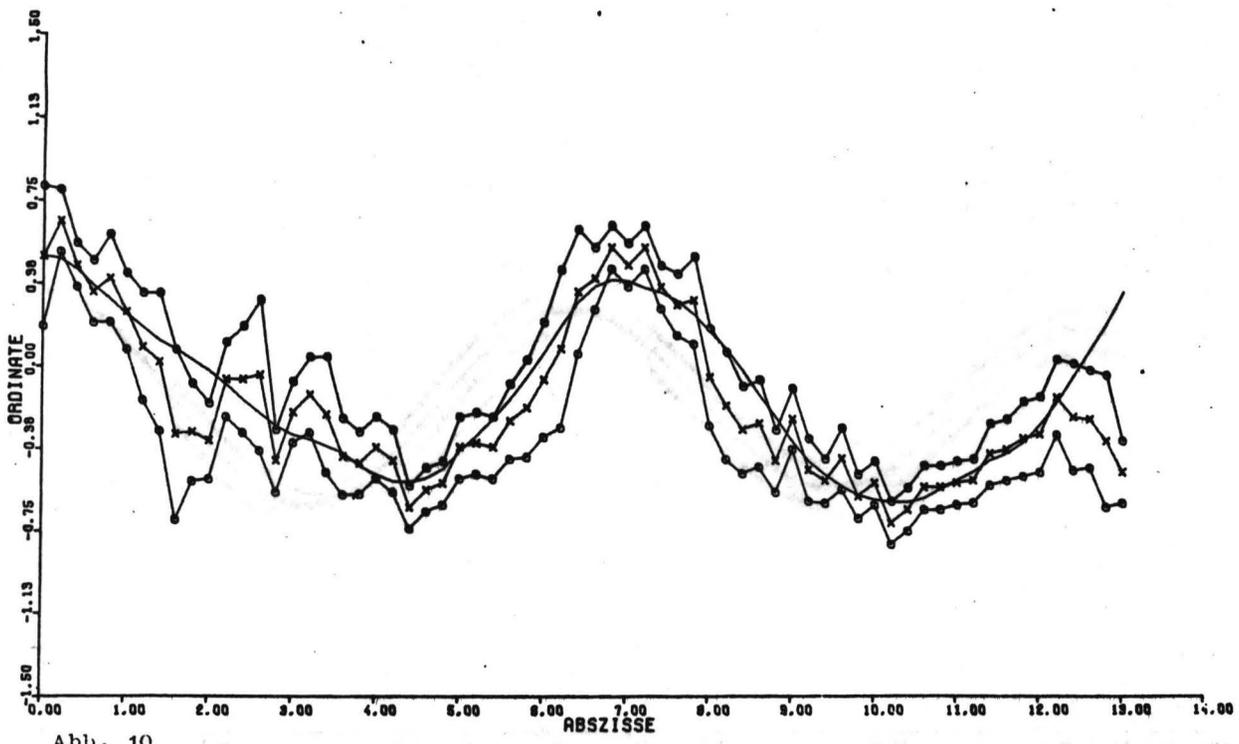


Abb. 10
 IKF für φ , Einzellauf
 Parameter
 $c = -0,2$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

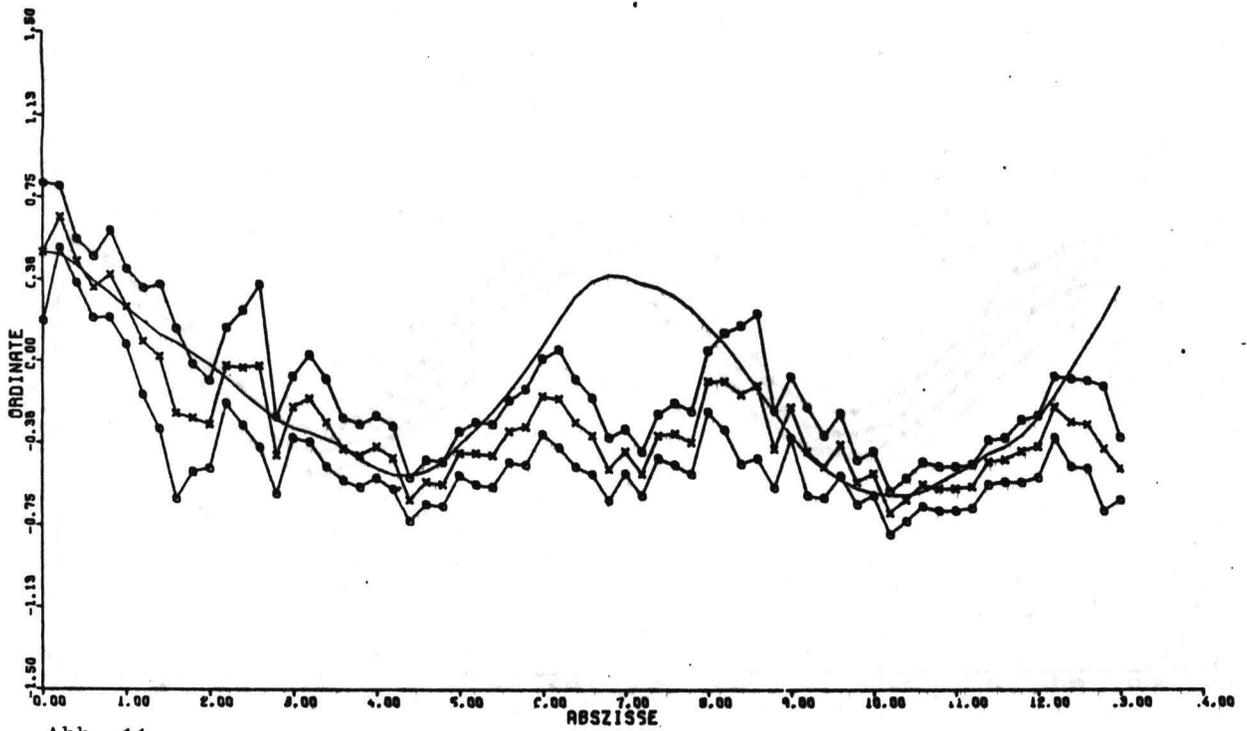


Abb. 11
 DKF für φ , Einzellauf
 Parameter $c = -0,2$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

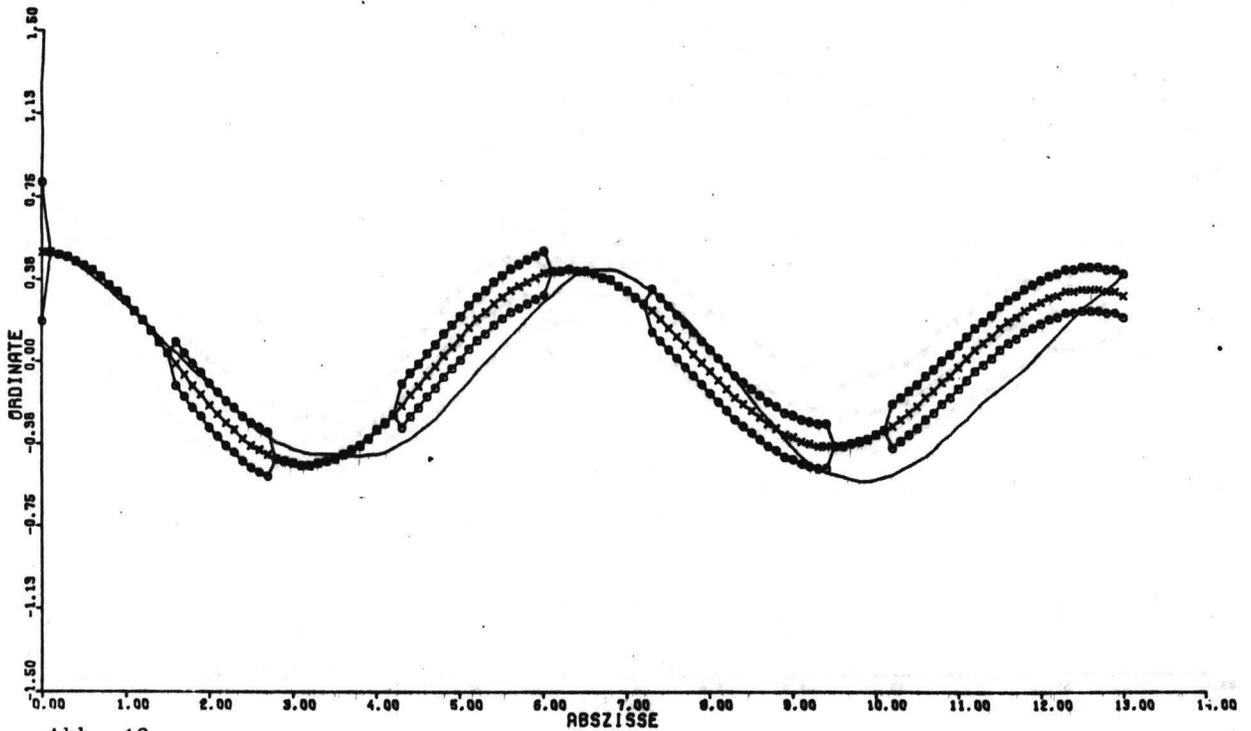


Abb. 12
 GSO für φ , Einzellauf
 $c = -0,1$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,1$ $R = 0,005$

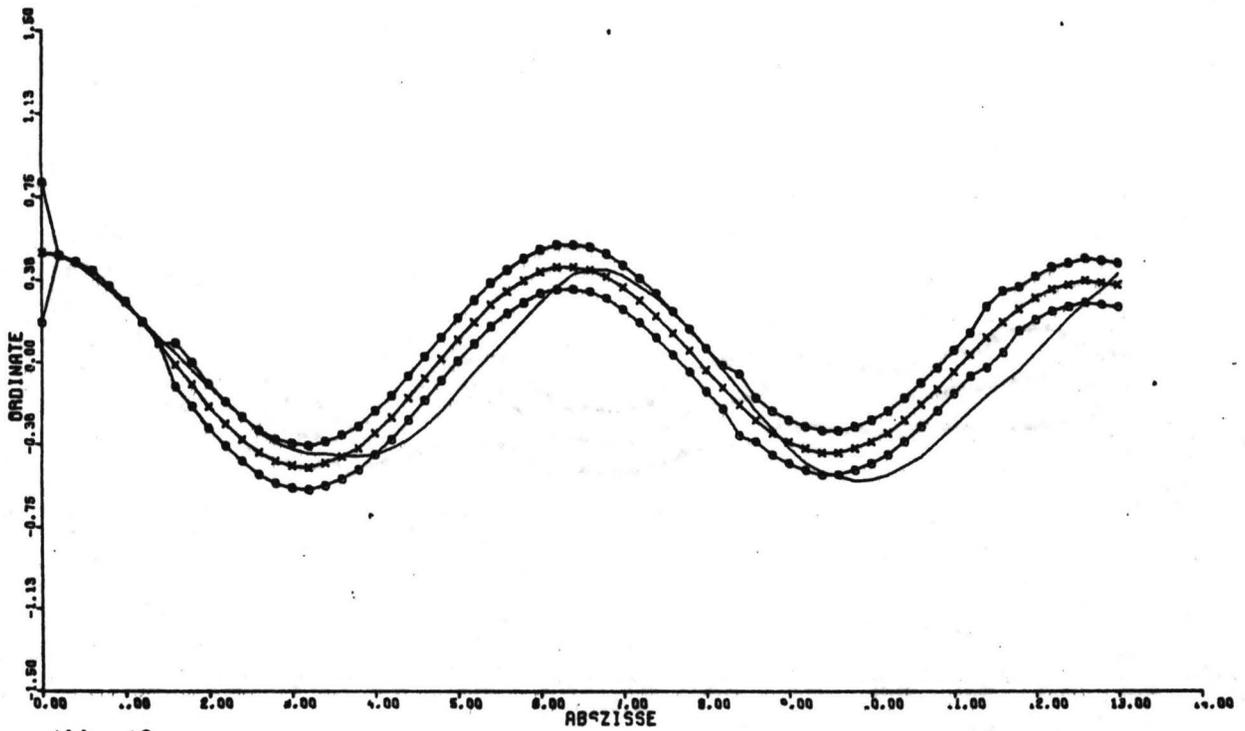


Abb. 13
 GSO für φ , Einzellauf
 $c = -0,1$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

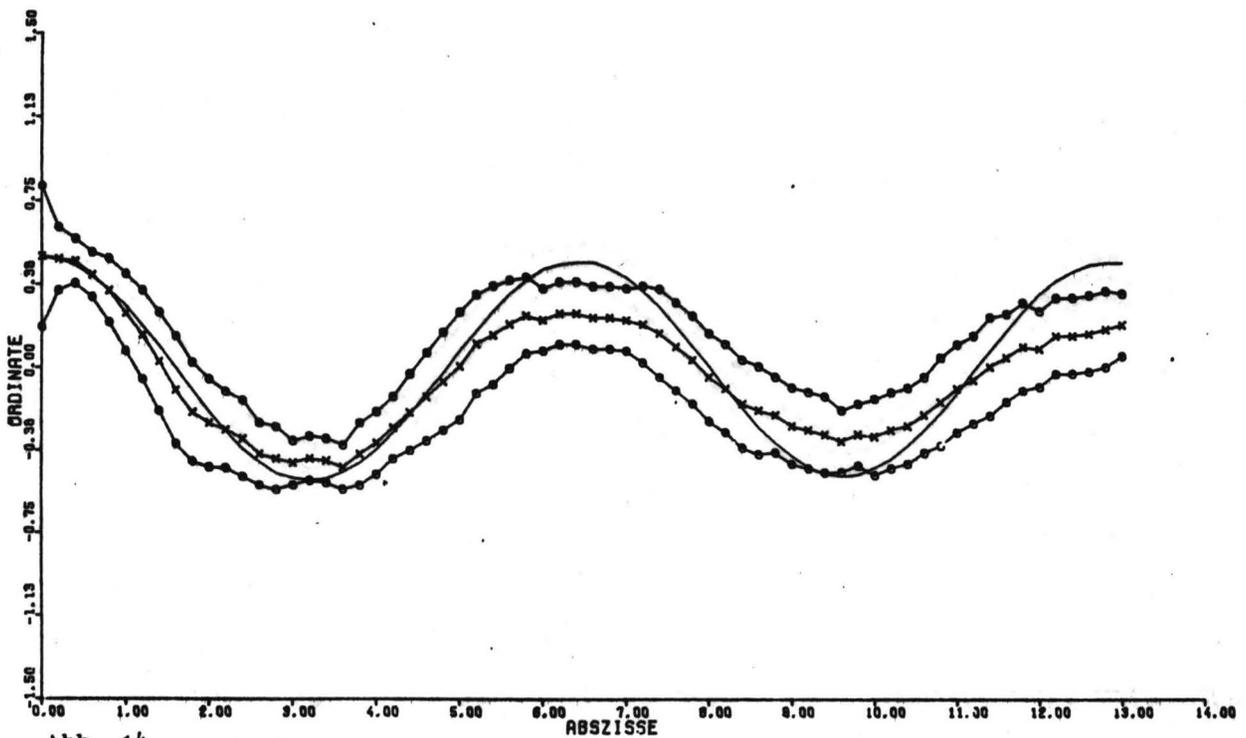


Abb. 14
 IKF für φ , Mittel über 50 Läufe
 $c = -0,1$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

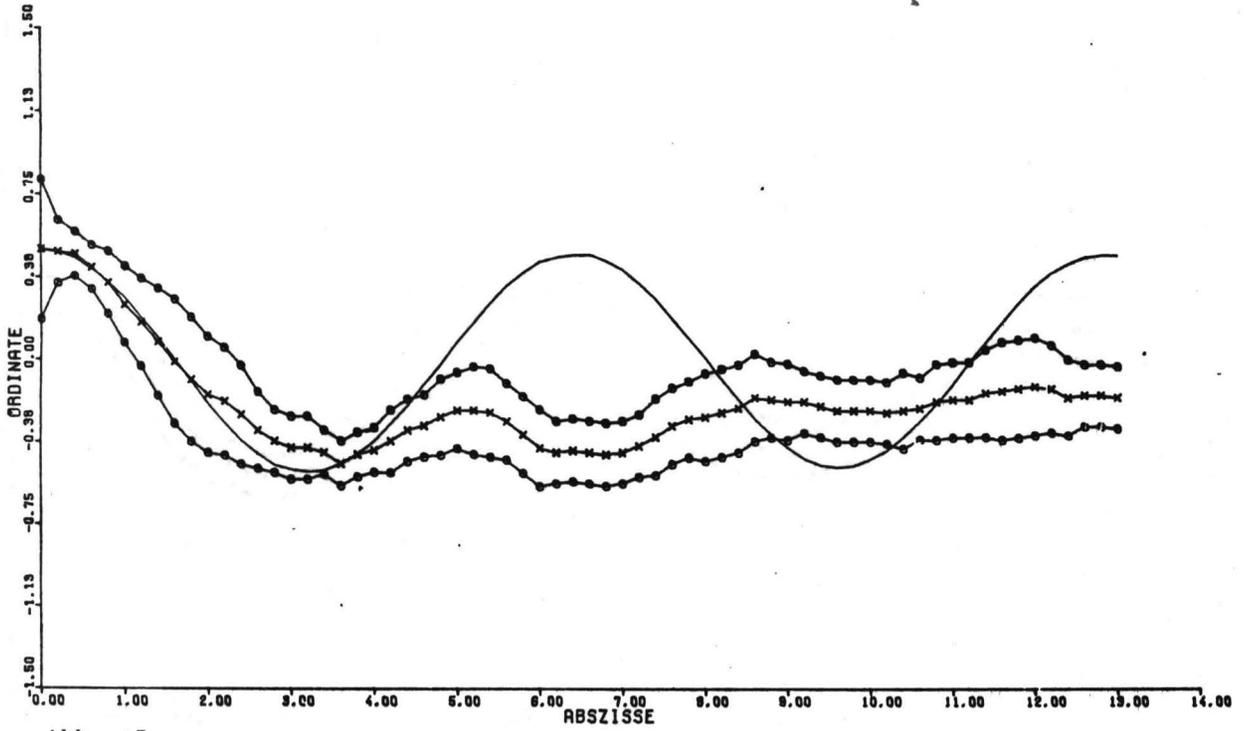


Abb. 15
 DKF für φ , Mittel über 50 Läufe
 $c = 0,1$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

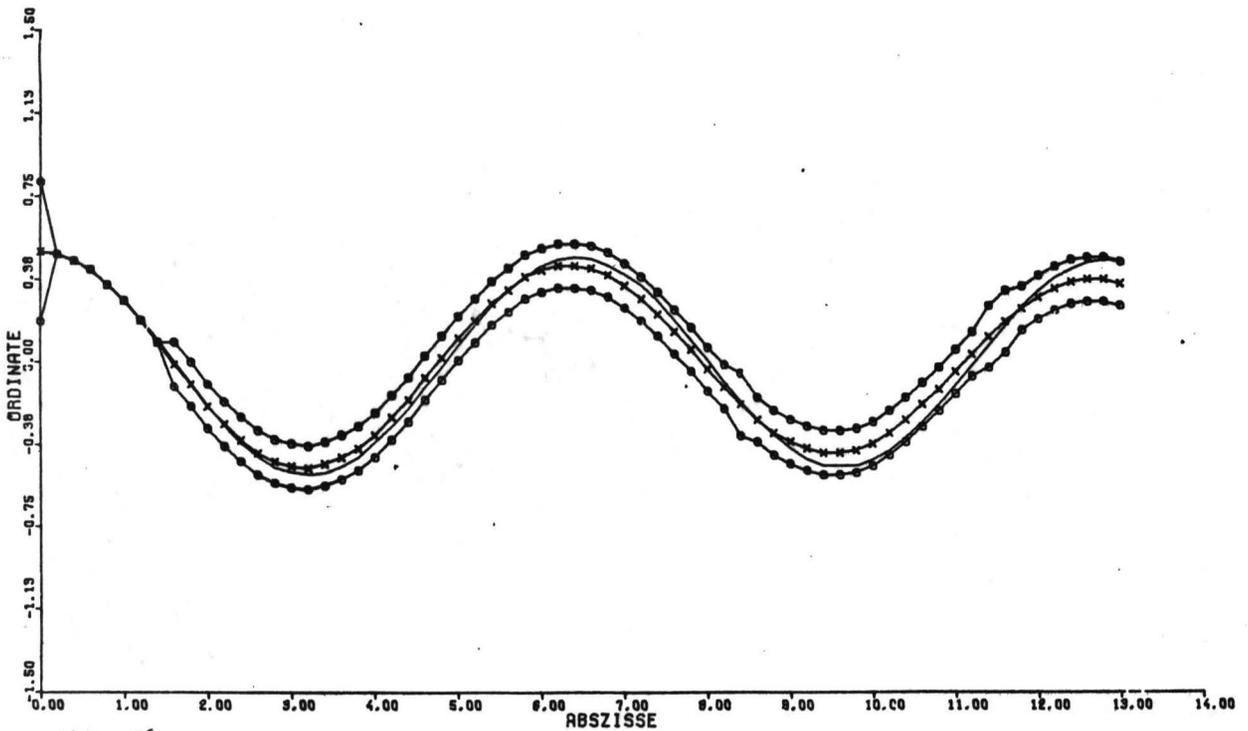


Abb. 16
 GSO für φ , Mittel über 50 Läufe
 $c = -0,1$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

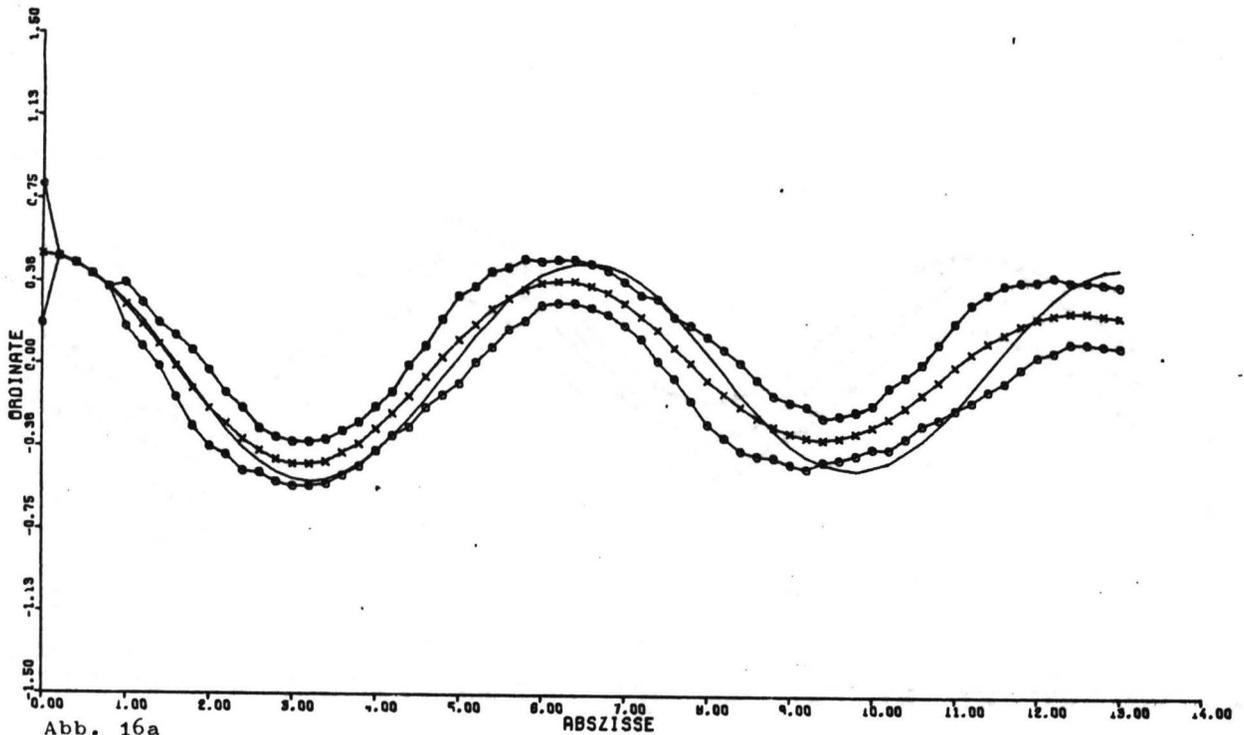


Abb. 16a
 GSO für φ , Mittel über 50 Läufe
 $c = -0,2$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

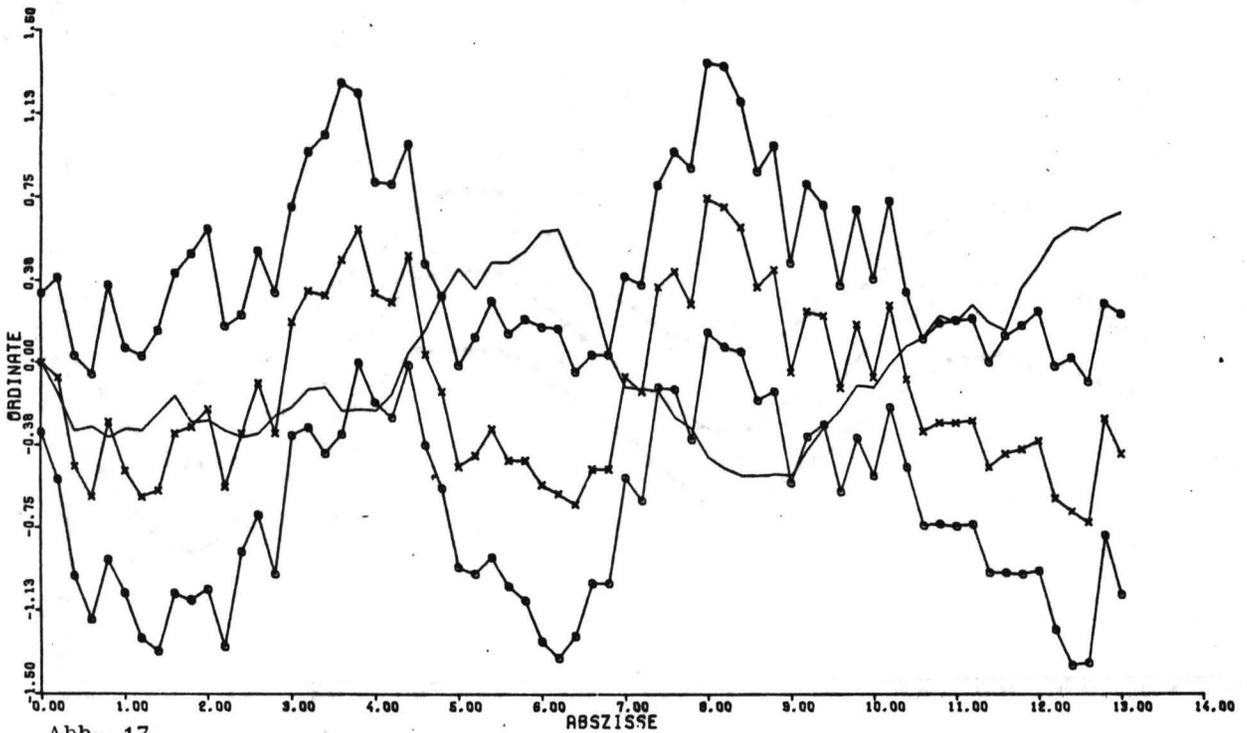


Abb. 17
 EKF für φ , Einzellauf
 $c = -0,2$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

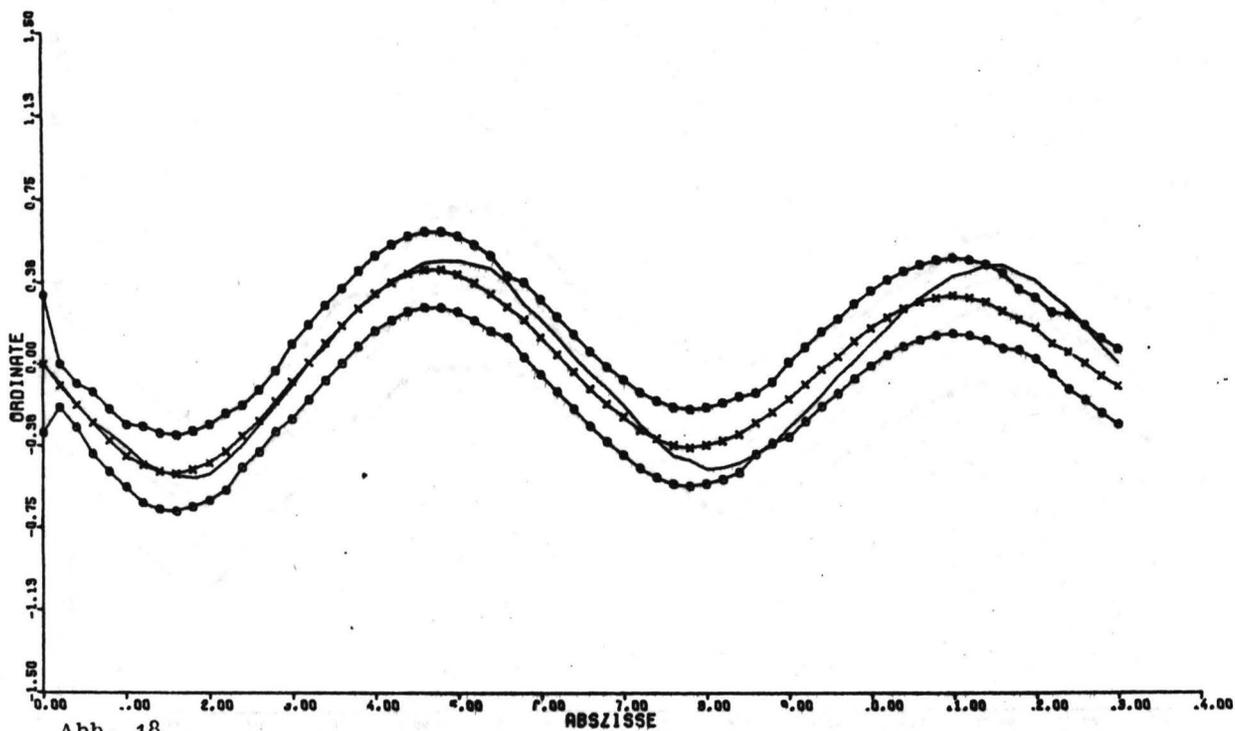


Abb. 18
 GSO für φ , Einzellauf
 $c = -0,2$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

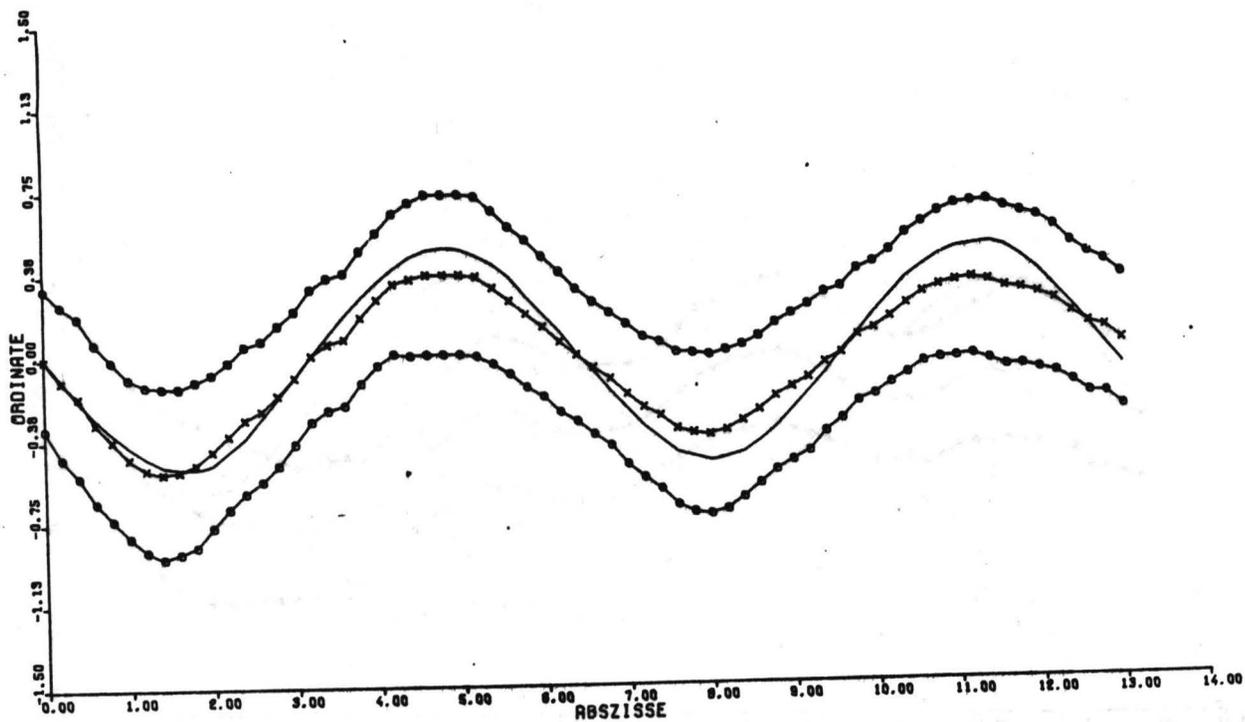


Abb. 19
 EKF für φ , Mittel über 50 Läufe
 $c = -0,1$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

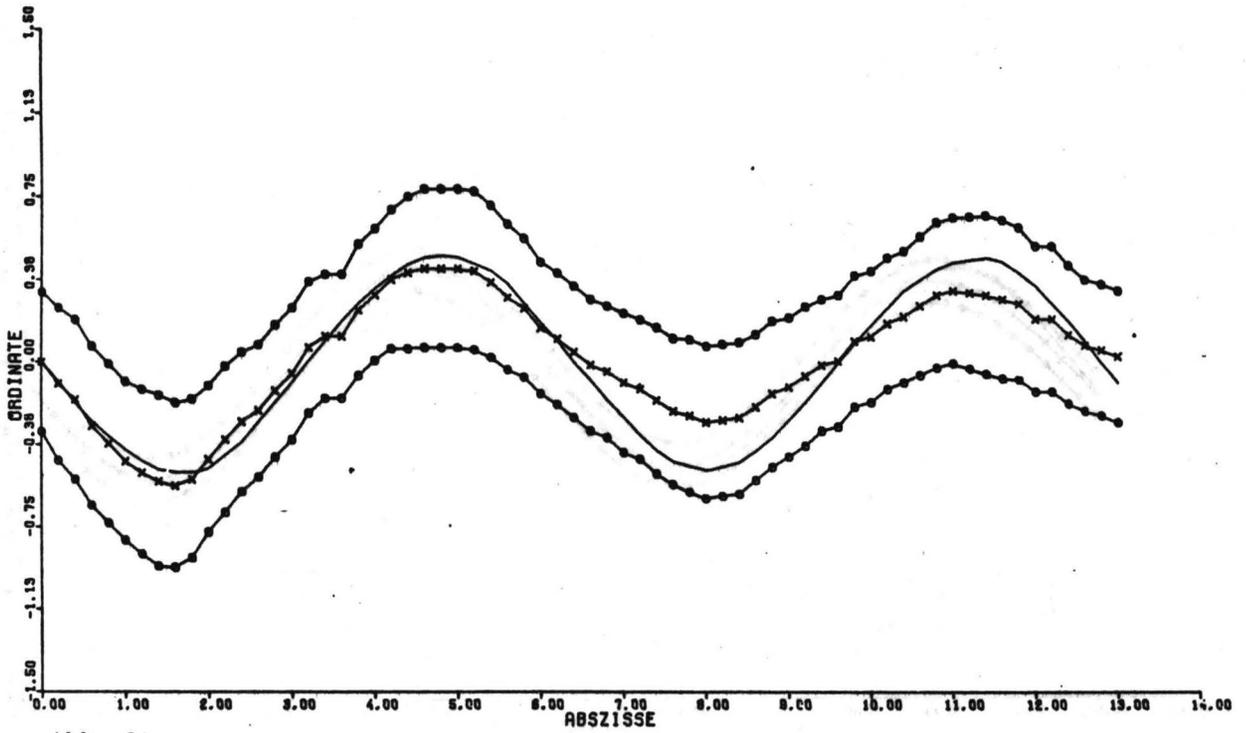


Abb. 20
 IKF für φ , Mittel über 50 Läufe
 $c = -0,1$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

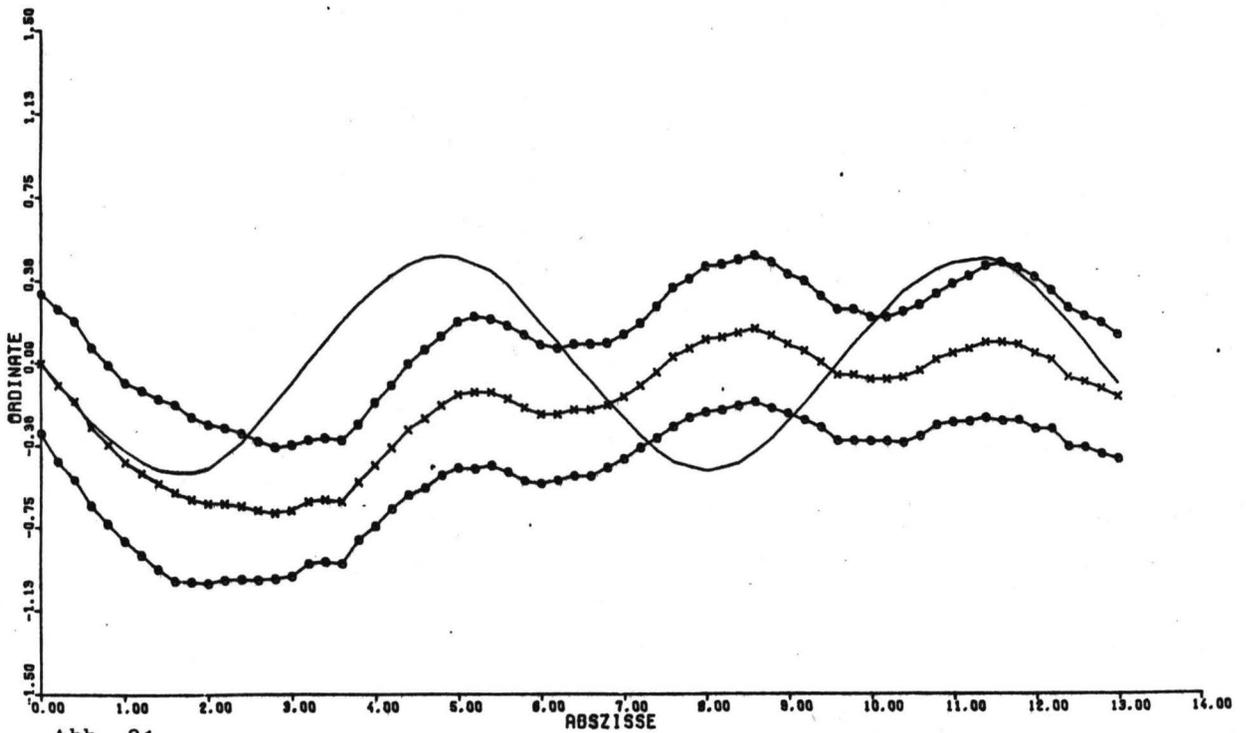


Abb. 21
 DKF für φ , Mittel über 50 Läufe
 $c = -0,1$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

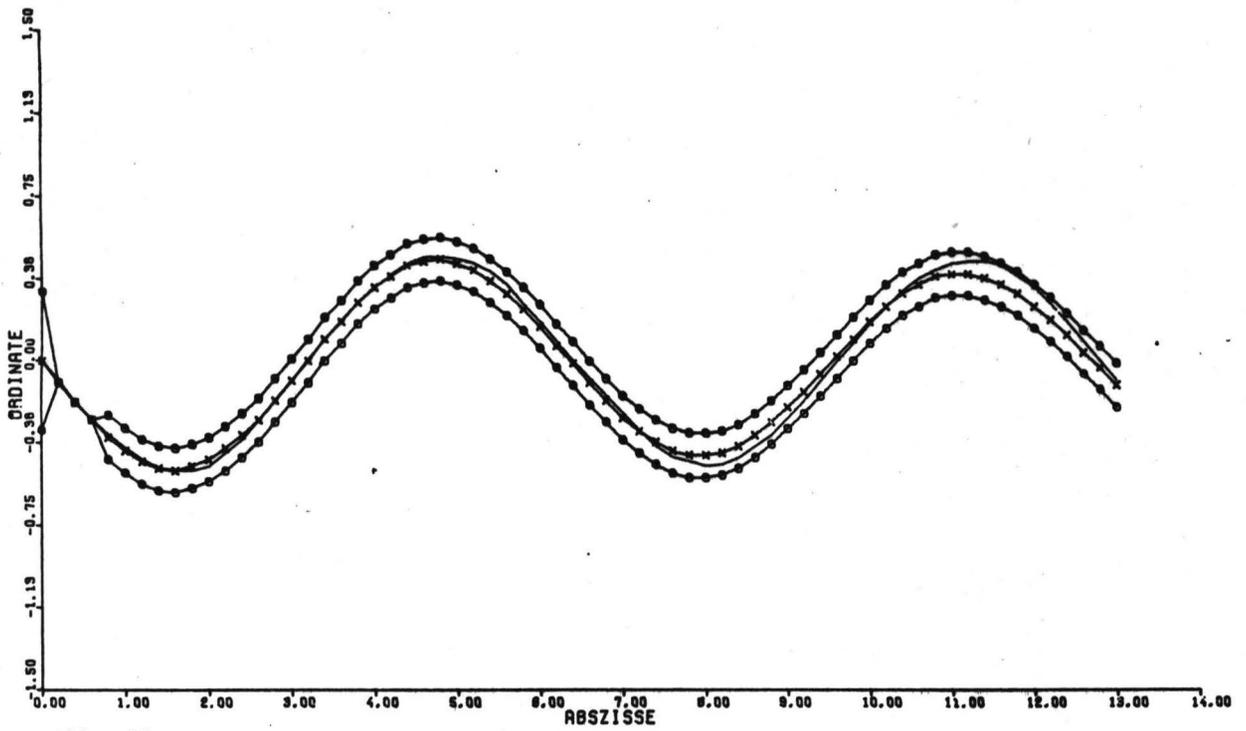


Abb. 22
 GSO für φ , Mittel über 50 Läufe
 $c = -0,1$ $\Delta_1 = 0,05$ $\Delta_2 = 0,2$ $R = 0,005$

Diese Untersuchung wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert. Die numerischen Berechnungen wurden an einer TR 440 Rechenanlage des Großrechenzentrums Berlin durchgeführt.

Herrn Prof. Dr. Ing. Landgraf danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für fruchtbare Diskussionen.

